SCHLEUSING

BEITRAG

ZUR

INTEGRALRECHNUNG



BEITRAG

ZUR

INTEGRALRECHNUNG.



BEITRAG

ZUR

INTEGRALRECHNUNG,

enthaltend die Integration

einiger

algebraischen und transcendenten

Functionen

von

R. von Schleusing.



BERLIN:
WEIDMANNSCHE BUCHHANDLUNG.
1873.



VORWORT.

Nachstehende Rechnungen auszuführen wurde der Verfasser durch das Bestreben veranlasst, das Gesetzmässige der Bildung der Coëfficienten in den entwickelten Integralen gewisser Functionen kennen zu lernen, so wenig dieselben auch auf den ersten Blick von einander abhängig erscheinen mochten. Als der hierbei einzuschlagende Weg bot sich die Methode der zu bestimmenden Coëfficienten dar: es wurden die charakteristischen Eigenschaften mehrerer bekannten Integrale derselben Gattung wahrgenommen und in éine Form zusammengefasst, aus welcher demnächst das allgemeine Resultat für alle Integrale dieser Art entsprang.

Der Verfasser entschied sich für die Veröffentlichung der vorliegenden kleinen Schrift, nachdem er die Ueberzeugung gewonnen hatte, dass die Entwickelung des $\int x^n . \cos^m x . dx$ und des $\int x^n . \cos^m x . \sin^p x . dx$ nicht ohne Interesse, ja dass durch ein Herabsteigen von diesen allgemeinen Resultaten zu specielleren Formeln sogar für die praktische Rechnung ein wünschenswerthes Hilfsmittel gefunden sei. Denn es lässt sich wohl nicht in Abrede stellen, dass, um das Integral der $2n$ten Potenz eines cosinus zu finden, es umständlicher ist, erst auf die $2n-2$te, von dieser auf die $2n-4$te Potenz u. s. w. recurriren zu müssen, als wenn man in die hier gegebenen Formeln sogleich die numerischen Werthe einzusetzen und dadurch direct zum Ziele zu gelangen im Stande ist.

In Betreff des Inhalts der nachstehenden Abhandlungen bemerkt der Verfasser noch, dass bei der Entwickelung des $\int x^n . \cos^m x . \sin^p x . dx$ im § 11. nur der Consequenz wegen dieselbe Methode beibehalten worden ist, welche bei der Herleitung des $\int x^n . \cos^m x . dx$ benutzt wurde; vielmehr ist die eigentliche Entwickelung des $\int x^n . \cos^m x . \sin^p x . dx$ im § 12. gegeben. Wenn daher § 11. überschlagen werden kann, so bietet dennoch

vielleicht die Eigenthümlichkeit der daselbst anzutreffenden Coëfficienten hinlängliches Interesse, um sich für den etwas langwierigen Weg, der zuvor zurückgelegt werden musste, einigermaassen entschädigt zu halten.

Der Verfasser würde seinen Zweck erreicht sehn, wenn er im Stande gewesen wäre, mit vorliegender Schrift Denjenigen, welche sich gleich ihm für die Analysis interessiren, eine kleine Anregung zu Theil werden zu lassen.

Berlin im Januar 1873.

Der Verfasser.

INHALT.

Erster Abschnitt.

Zweiter Abschnitt.

Anhang.

Druckfehler und Zusätze.

Seite 6, Zeile 8 von oben. Statt $\frac{27(m-1)(m-2)(m-3)}{(3m-4)(3m-7)(3m-10)} x^{(m-4)n}$ heisst es $\frac{2^7(m-1)(m-2)(m-3)}{(3m-4)(3m-7)(3m-10)} x^{(m-4)n}$

Seite 28, Zeile 7 von unten. Statt $\cos^2 x \cdot s.\, nx$ heisst es $\cos^2 x \cdot \sin x$

Seite 35, Zeile 14 von unten. Statt »$\cos^2 x \cdot \sin x$ und mit $\sin x$« heisst es »$\cos^2 x \sin x$, $\cos x \sin x$ und mit $\sin x$«.

Seite 37, Zeile 9 von oben. Hinter x^{n-7} muss statt + ein minus-Zeichen stehn.

Seite 39, Zeile 14 von unten. Statt »der gleichen Potenzen« heisst es »der gleichstelligen Potenzen«.

Seite 45, Zeile 4 von oben. Statt x^{n-4} heisst es x^{n-3}

Seite 56, Zeile 3 von oben. Statt $K = n(n-1)(p-3)$ u. s. w. heisst es $K = n(p-1)(p-3)$ u. s. w.

Seite 57. Statt $22\, O(p-7)$ heisst es $22(-O)(p-7)$.

Seite 58. In No. 28 bei H, ist ein Factor des Nenners fälschlich mit $(m-8)$ bezeichnet, statt $(m+8)$.

Seite 60. In der mit $\cos^{m+8} x \cdot \sin^{p-8} x$ multiplicirten Summe fehlt im Zähler des mit x^{n-7} multiplicirten Bruches ein n. Statt $(n-1)(n-2)$ u. s. w. heisst es $n(n-1)(n-2)$ u. s. w.

Seite 76. Hinter No. IV sind noch folgende Zusätze zu machen:

V. $$\int \frac{dx}{\sin^n x} = \frac{-\cos x + \left(\frac{n-2}{3}\right)\cos^3 x - \frac{(n-2)(n-4)}{3\cdot 5}\cos^5 x + \frac{(n-2)(n-4)(n-6)}{3\cdot 5\cdot 7}\cos^7 x - \frac{(n-2)(n-4)(n-6)(n-8)}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}\cos^9 x \dots\dots}{\sin^{n-1} x} + C.$$

und wenn ich x in $\frac{\pi}{2} - x$ verwandle

VI. $$\int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{\sin x - \left(\frac{n-2}{3}\right)\sin^3 x + \frac{(n-2)(n-4)}{3\cdot 5}\sin^5 x - \frac{(n-2)(n-4)(n-6)}{3\cdot 5\cdot 7}\sin^7 x + \frac{(n-2)(n-4)(n-6)(n-8)}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}\sin^9 x \dots\dots}{\cos^{n-1} x} + C.$$

VII. $$\int \frac{dx}{\sin^{2n+1} x} = A \cdot l\left(tg\frac{x}{2}\right) - \left\{\frac{(1-A)\cos x - a\cos^3 x + b\cos^5 x - c\cos^7 x + f\cos^9 x - g\cos^{11} x \dots\dots A\cos^{2n-1} x}{\sin^{2n} x}\right\} + C,$$ wobei

$A = \frac{1.\,3.\,5.\,7.\,9 \dots\dots \text{bis } (2n-1)}{2.\,4.\,6.\,8.\,10 \dots\dots \text{bis } 2n}$, $a = \frac{A(1-3n) + (2n-1)}{3}$,

$b = \frac{a(2n-3) - n_2 \cdot A}{5}$ $\left\{\text{wobei } n_2 = \frac{n(n-1)}{1.\,2}\right\}$, $c = \frac{b(2n-5) - n_3 \cdot A}{7}$ $\left\{\text{wobei } n_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\,2.\,3}\right\}$

$f = \frac{c(2n-7) - n_4 \cdot A}{9}$ $\left\{\text{wobei } n_4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\,2.\,3.\,4}\right\}$, $g = \frac{f(2n-9) - n_5 \cdot A}{11}$ $\left\{\text{wobei } n_5 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.\,2.\,3.\,4.\,5}\right\}$

VIII. $$\int \frac{dx}{\cos^{2n+1} x} = A \cdot l\left(\frac{\cos x}{1-\sin x}\right) + \left\{\frac{(1-A)\sin x - a\sin^3 x + b\sin^5 x - c\sin^7 x + f\sin^9 x - g\sin^{11} x \dots\dots A\sin^{2n-1} x}{\cos^{2n} x}\right\} + C.$$

wobei die Coëfficienten dieselbe Bedeutung haben als in VII. Die Integrale gelten für positive ganze Werthe des n.

Erster Abschnitt.

§. 1.

Es sei gegeben die Function:

$y = (1-x^n)^q$. Dieselbe hat den Differentialquotienten

$\frac{dy}{dx} = q\left(1-x^n\right)^{q-1}.\left(-nx^{n-1}\right)$

$= -nq.x^{n-1}.\left(1-x^n\right)^{q-1}$. Daher ist

$y = -nq.\int x^{n-1}.\left(1-x^n\right)^{q-1}.dx = \left(1-x^n\right)^q$ oder

$\int x^{n-1}.\left(1-x^n\right)^{q-1}.dx = -\frac{(1-x^n)^q}{nq} + C$. Bezeichnet man $q-1=p$ oder $q=p+1$ so ist

1) $\int x^{n-1}.\left(1-x^n\right)^p.dx = -\frac{(1-x^n)^{p+1}}{n(p+1)} + C.$

Auf diese Gleichung wende ich die theilweise Integration an, bei welcher die Formel:

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$ in Betracht kommt.

Es sei $u = x^{n-1}.\left(1-x^n\right)^p$ und $v = x$, dann ist

$\frac{du}{dx} = x^{n-1}.p\left(1-x^n\right)^{p-1}.\left(-nx^{n-1}\right) + \left(1-x^n\right)^p.\left(n-1\right)x^{n-2}$ und

$du = -npx^{2n-2}.\left(1-x^n\right)^{p-1}.dx + (n-1)x^{n-1}.\left(1-x^n\right)^p.dx$, daher

$v\,du = -npx^{2n-1}.\left(1-x^n\right)^{p-1}.dx + (n-1)x^{n-1}.\left(1-x^n\right)^p.dx$. Folglich wird

$\int x^{n-1}.\left(1-x^n\right)^p.dx = x^n\left(1-x^n\right)^p + np\int x^{2n-1}.\left(1-x^n\right)^{p-1}.dx - \left(n-1\right)\int x^{n-1}.\left(1-x^n\right)^p.dx$ oder

$np\int x^{2n-1}.\left(1-x^n\right)^{p-1}.dx = -x^n\left(1-x^n\right)^p + n\int x^{n-1}.\left(1-x^n\right)^p.dx$ also

$\int x^{2n-1}.\left(1-x^n\right)^{p-1}.dx = -\frac{x^n(1-x^n)^p}{np} - \frac{(1-x^n)^{p+1}}{np(p+1)} + C = -\frac{(1+px^n)(1-x^n)^p}{np(p+1)} + C$, oder es ist auch

2) $\int x^{2n-1}.\left(1-x^n\right)^p.dx = -\frac{\{1+(p+1)x^n\}(1-x^n)^{p+1}}{n(p+1)(p+2)} + C.$

Hierauf wende ich noch einmal die Methode der theilweisen Integration an. Es sei

$u = x^{2n-1}.\left(1-x^n\right)^p$ und $v = x$ dann ist

$\frac{du}{dx} = x^{2n-1}.p\left(1-x^n\right)^{p-1}.\left(-nx^{n-1}\right) + \left(1-x^n\right)^p.\left(2n-1\right)x^{2n-2}$ und

$du = \left\{-npx^{3n-2}.\left(1-x^n\right)^{p-1} + \left(2n-1\right)x^{2n-2}.\left(1-x^n\right)^p\right\}dx$ daher

$v\,du = -npx^{3n-1}.\left(1-x^n\right)^{p-1}.dx + (2n-1)x^{2n-1}.\left(1-x^n\right)^p.dx$. Es ist folglich

$\int x^{2n-1}.\left(1-x^n\right)^p.dx = x^{2n}.\left(1-x^n\right)^p + np\int x^{3n-1}.\left(1-x^n\right)^{p-1}.dx - (2n-1)\int x^{2n-1}.\left(1-x^n\right)^p.dx$ oder

$np\int x^{3n-1}.\left(1-x^n\right)^{p-1}.dx = -x^{2n}.\left(1-x^n\right)^p + 2n\int x^{2n-1}.\left(1-x^n\right)^p.dx$. Daher ist also

$$\int x^{3n-1}.\left(1-x^n\right)^{p-1}.dx = -\frac{x^{2n}.\left(1-x^n\right)^p}{np} - \frac{2\{1+(p+1)x^n\}\left(1-x^n\right)^{p+1}}{np(p+1)(p+2)} + C$$

$$= -\left(\frac{(p+1)(p+2)x^{2n}.\left(1-x^n\right)^p + 2\{1+(p+1)x^n\}\left(1-x^n\right)^{p+1}}{np(p+1)(p+2)}\right) + C$$

$$= -\frac{\left(1-x^n\right)^p\left((p+1)(p+2)x^{2n} + 2(1-x^n)\{1+(p+1)x^n\}\right)}{np(p+1)(p+2)} + C$$

$$= -\frac{\left(1-x^n\right)^p.\{(p+1)(p+2)x^{2n} + 2 - 2x^n + 2(p+1)x^n(1-x^n)\}}{np(p+1)(p+2)} + C$$

$$= -\frac{\left(1-x^n\right)^p\{x^{2n}\left((p+1)(p+2) - 2(p+1)\right) + 2 - 2x^n + 2px^n + 2x^n\}}{np(p+1)(p+2)} + C \text{ also}$$

$$\int x^{3n-1}.\left(1-x^n\right)^{p-1}.dx = -\frac{\left(1-x^n\right)^p\{2 + 2px^n + p(p+1)x^{2n}\}}{np(p+1)(p+2)} + C, \text{ und es ist auch}$$

3) $$\int x^{3n-1}.\left(1-x^n\right)^p\ .\ dx = -\frac{\{2 + 2(p+1)x^n + (p+1)(p+2)x^{2n}\}\left(1-x^n\right)^{p+1}}{n(p+1)(p+2)(p+3)} + C. \text{ Vorher war aber}$$

2) $$\int x^{2n-1}.\left(1-x^n\right)^p\ .\ dx = -\frac{\{1+(p+1)x^n\}\left(1-x^n\right)^{p+1}}{n(p+1)(p+2)} + C \text{ und}$$

1) $$\int x^{n-1}.\left(1-x^n\right)^p\ .\ dx = -\frac{\left(1-x^n\right)^{p+1}}{n(p+1)} + C.$$

Durch die Vergleichung dieser Integrale untereinander stellt sich die Form dar, unter welcher überhaupt $\int x^{mn-1}.\left(1-x^n\right)^p.dx$ erscheinen müsse, und kann ich nunmehr sogleich zu dieser Verallgemeinerung schreiten. (Auch könnte ich, um die den Integralen gemeinschaftliche Form mit noch grösserer Sicherheit zu erkennen, durch theilweise Integration des $\int x^{3n-1}.\left(1-x^n\right)^p.dx$ erst noch $\int x^{4n-1}.\left(1-x^n\right)^p.dx$ ausrechnen.)

Ich wende jetzt, um $\int x^{mn-1}.\left(1-x^n\right)^p.dx$ zu finden, die Methode der unbestimmten Coefficienten in folgender Weise an: Es sei

$$\int x^{mn-1}.\left(1-x^n\right)^p.dx = \left(ax^{(m-1)n} + bx^{(m-2)n} + cx^{(m-3)n} + fx^{(m-4)n} + gx^{(m-5)n} + \ldots\ldots\right)\left(1-x^n\right)^{p+1} + C$$

wobei die Coefficienten $a\ b\ c$ u. s. w. vorläufig noch unbestimmt bleiben, dann ergiebt die Differenziation dieser Gleichung folgende andere:

$$\begin{aligned} x^{mn-1}.\left(1-x^n\right)^p = &\{ax^{(m-1)n} + bx^{(m-2)n} + cx^{(m-3)n} + fx^{(m-4)n} + gx^{(m-5)n} + \ldots\ldots\}(p+1)\left(1-x^n\right)^p\left(-nx^{n-1}\right) \\ &+ \left(1-x^n\right)^{p+1}.\{an(m-1)x^{mn-n-1} + bn(m-2)x^{mn-2n-1} + cn(m-3)x^{mn-3n-1} \\ &+ fn(m-4)x^{mn-4n-1} + gn(m-5)x^{mn-5n-1} + \ldots\ldots\} \end{aligned}$$

Diese Gleichung durch $\left(1-x^n\right)^p$ dividirt und die angedeutete Multiplication ausgeführt, ergiebt

$$\begin{aligned} x^{mn-1} = &- an(p+1)x^{mn-1} - bn(p+1)x^{mn-n-1} - cn(p+1)x^{mn-2n-1} - fn(p+1)x^{mn-3n-1} \\ &+ an(m-1)x^{mn-n-1} + bn(m-2)x^{mn-2n-1} + cn(m-3)x^{mn-3n-1} \\ &- an(m-1)x^{mn-1} - bn(m-2)x^{mn-n-1} - cn(m-3)x^{mn-2n-1} - fn(m-4)x^{mn-3n-1} \\ &- gn(p+1)x^{mn-4n-1} - \ldots\ldots \\ &+ fn(m-4)x^{mn-4n-1} + \ldots\ldots \\ &- gn(m-5)x^{mn-4n-1} - \ldots\ldots \end{aligned}$$

In dieser Gleichung ist das Gesetz enthalten, nach welchem die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von x entstanden sind; es müssen nämlich folgende Gleichungen stattfinden:

1) $-an(p+1)-an(m-1)=1$ oder

$-an(p+1+m-1)=1$ daher

$a=-\frac{1}{n(m+p)}$

2) $an(m-1)-bn(p+1)-bn(m-2)=0$ also

$-bn(p+1+m-2)=-an(m-1)$ daher

$b=\frac{a(m-1)}{m+p-1}=-\frac{m-1}{n(m+p)(m+p-1)}$

3) $bn(m-2)-cn(p+1)-cn(m-3)=0$ also

$-cn(p+1+m-3)=-bn(m-2)$ daher

$c=\frac{b(m-2)}{m+p-2}=-\frac{(m-1)(m-2)}{n(m+p)(m+p-1)(m+p-2)}$

4) $cn(m-3)-fn(p+1)-fn(m-4)=0$ also

$-fn(p+1+m-4)=-cn(m-3)$ daher

$f=\frac{c(m-3)}{m+p-3}=-\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{n(m+p)(m+p-1)(m+p-2)(m+p-3)}$

Es entsteht also folgendes Integral:

I.)
$$\int x^{mn-1}.(1-x^n)^p.dx=-\frac{(1-x^n)^{p+1}}{n(m+p)}\left\{x^{(m-1)n}+\left(\frac{m-1}{m+p-1}\right)x^{(m-2)n}+\left(\frac{(m-1)(m-2)}{(m+p-1)(m+p-2)}\right)x^{(m-3)n}+\left(\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{(m+p-1)(m+p-2)(m+p-3)}\right)x^{(m-4)n}+\ldots\right\}+C.$$

Auch ist

II.)
$$\int x^{mn-1}.(1-x^m)^p.dx=-\frac{(1-x^m)^{p+1}}{m(n+p)}\left\{x^{(n-1)m}+\left(\frac{n-1}{n+p-1}\right)x^{(n-2)m}+\left(\frac{(n-1)(n-2)}{(n+p-1)(n+p-2)}\right)x^{(n-3)m}+\left(\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{(n+p-1)(n+p-2)(n+p-3)}\right)x^{(n-4)m}+\ldots\right\}+C.$$

§. 2.

Es sei im $\int x^{mn-1}.(1-x^n)^p.dx$ nunmehr $p=-\frac{1}{2}$ dann entsteht

$$\int\frac{x^{mn-1}.dx}{\sqrt{1-x^n}}=-\frac{\sqrt{1-x^n}}{n(m-\frac{1}{2})}\left\{x^{(m-1)n}+\left(\frac{m-1}{m-\frac{3}{2}}\right)x^{(m-2)n}+\left(\frac{(m-1)(m-2)}{(m-\frac{3}{2})(m-\frac{5}{2})}\right)x^{(m-3)n}+\left(\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{(m-\frac{3}{2})(m-\frac{5}{2})(m-\frac{7}{2})}\right)x^{(m-4)n}+\ldots\ldots\right\}+C \text{ oder}$$

$$\int\frac{x^{mn-1}.dx}{\sqrt{1-x^n}}=-\frac{2\sqrt{1-x^n}}{n(2m-1)}\left\{x^{(m-1)n}+\frac{2(m-1)}{2m-3}x^{(m-2)n}+\frac{4(m-1)(m-2)}{(2m-3)(2m-5)}x^{(m-3)n}+\frac{8(m-1)(m-2)(m-3)}{(2m-3)(2m-5)(2m-7)}x^{(m-4)n}+\ldots\ldots\right\}+C.$$

wobei die Factoren 1, 2, 4, 8 u. s. w. sich nach und nach verdoppeln, sodass sie mit 16, 32, 64, 128 u. s. w. fortschreiten würden.

1) Im $\int\frac{x^{mn-1}.dx}{\sqrt{1-x^n}}$ sei nun

$m=1$, so ist $\int\frac{x^{n-1}.dx}{\sqrt{1-x^n}}=-\frac{2}{n}\sqrt{1-x^n}+C.$

Wenn $m=2$, so ist $\int\frac{x^{2n-1}.dx}{\sqrt{1-x^n}}=-\frac{2\sqrt{1-x^n}}{3n}\left(x^n+2\right)+C.$

Wenn $m=3$, so ist $\int\frac{x^{3n-1}.dx}{\sqrt{1-x^n}}=-\frac{2\sqrt{1-x^n}}{5n}\left(x^{2n}+\frac{2.2}{3}x^n+\frac{4.2.1}{3.1}\right)+C$

$=-\frac{2\sqrt{1-x^n}}{15n}\left(3x^{2n}+4x^n+8\right)+C.$

Wenn $m=4$, so ist $\int\frac{x^{4n-1}.dx}{\sqrt{1-x^n}}=-\frac{2\sqrt{1-x^n}}{7n}\left(x^{3n}+\frac{2.3}{5}x^{2n}+\frac{4.3.2}{5.3}x^n+\frac{8.3.2.1}{5.3.1}\right)+C$

$=-\frac{2\sqrt{1-x^n}}{35n}\left(5x^{3n}+6x^{2n}+8x^n+16\right)+C.$

Wenn $m = 5$, so ist $\int \frac{x^{5n-1} \, . \, dx}{\sqrt{1-x^n}} = - \frac{2\sqrt{1-x^n}}{9n}\left(x^{4n} + \frac{2.4}{7}x^{3n} + \frac{4.4.3}{7.5}x^{2n} + \frac{8.4.3.2}{7.5.3}x^n + \frac{16.4.3.2.1}{7.5.3.1}\right) + C$

$$= - \frac{2\sqrt{1-x^n}}{315n}\left(35x^{4n} + 40x^{3n} + 48x^{2n} + 64x^n + 128\right) + C.$$

Auf diese Weise kann man mit den Substitutionen fortfahren.

2) Es sei im $\int \frac{x^{mn-1} \, . \, dx}{\sqrt{1-x^n}}$ nunmehr $n = 2$, so entsteht

$$\int \frac{x^{2m-1} \, . \, dx}{\sqrt{1-x^2}} = - \frac{\sqrt{1-x^2}}{2m-1}\left\{x^{2(m-1)} + \frac{2(m-1)}{2m-3}x^{2(m-2)} + \frac{4(m-1)(m-2)}{(2m-3)(2m-5)}x^{2(m-3)} + \frac{8(m-1)(m-2)(m-3)}{(2m-3)(2m-5)(2m-7)}x^{2(m-4)} + \ldots\right\} + C.$$

Wenn jetzt $2m-1=n$ gewählt wird, so ist

$$\int \frac{x^n \, . \, dx}{\sqrt{1-x^2}} = - \frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\left\{x^{n-1} + \left(\frac{n-1}{n-2}\right)x^{n-3} + \frac{4\cdot\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-3}{2}\right)}{(n-2)(n-4)}x^{n-5} + \frac{8\cdot\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-3}{2}\right)\left(\frac{n-5}{2}\right)}{(n-2)(n-4)(n-6)}x^{n-7} + \ldots\right\} + C, \text{ oder}$$

$$\underline{\int \frac{x^n \, . \, dx}{\sqrt{1-x^2}} = - \frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\left\{x^{n-1} + \left(\frac{n-1}{n-2}\right)x^{n-3} + \frac{(n-1)(n-3)}{(n-2)(n-4)}x^{n-5} + \frac{(n-1)(n-3)(n-5)}{(n-2)(n-4)(n-6)}x^{n-7} + \ldots\right\} + C.}$$

Es sei hierin $x = \cos v$, dann ist $\sqrt{1-x^2} = \sin v$ und $dx = -\sin v \, . \, dv$, daher

$$\int \frac{\cos^n v \, . \, (-\sin v)\, dv}{\sin v} = - \frac{\sin v}{n}\left\{\cos^{n-1} v + \left(\frac{n-1}{n-2}\right)\cos^{n-3} v + \frac{(n-1)(n-3)}{(n-2)(n-4)}\cos^{n-5} v + \ldots\right\} + C.$$

Es ist also

$$\underline{\int \cos^n v \, . \, dv = \frac{\sin v}{n}\left\{\cos^{n-1} v + \left(\frac{n-1}{n-2}\right)\cos^{n-3} v + \frac{(n-1)(n-3)}{(n-2)(n-4)}\cos^{n-5} v + \frac{(n-1)(n-3)(n-5)}{(n-2)(n-4)(n-6)}\cos^{n-7} v + \ldots\right\} + C.}$$

welche Integration freilich nur für die ungeraden Werthe des n gelingt. (cf. Anhang, No. II.)

Wähle ich im $\int \frac{x^n \, . \, dx}{\sqrt{1-x^2}}$ aber $x = \sin v$, dann ist $\sqrt{1-x^2} = \cos v$ und $dx = \cos v \, . \, dv$ und ich erhalte

$$\underline{\int \sin^n v \, . \, dv = - \frac{\cos v}{n}\left\{\sin^{n-1} v + \left(\frac{n-1}{n-2}\right)\sin^{n-3} v + \frac{(n-1)(n-3)}{(n-2)(n-4)}\sin^{n-5} v + \frac{(n-1)(n-3)(n-5)}{(n-2)(n-4)(n-6)}\sin^{n-7} v + \ldots\right\} + C.}$$

Wenn $n = 1$, so ist $\int \sin v \, . \, dv = -\cos v + C$.

Wenn $n = 3$, so ist $\int \sin^3 v \, . \, dv = - \frac{\cos v}{3}\left(\sin^2 v + 2\right) + C$, während dieses Integral auf anderem Wege

$$= -\cos v + \frac{\cos^3 v}{3} + C \text{ gefunden wird.}$$

Wenn $n = 5$, so ist $\int \sin^5 v \, . \, dv = - \frac{\cos v}{5}\left(\sin^4 v + \frac{4}{3}\sin^2 v + \frac{8}{3}\right) + C$.

Wenn im $\int \cos^n v \, . \, dv$ nun $n = 1$, so ist

$$\int \cos v \, . \, dv = \sin v + C.$$

Wenn $n = 3$, so ist $\int \cos^3 v \, . \, dv = \frac{\sin v}{3}\left(\cos^2 v + 2\right) + C$, während dieses Integral auf anderem Wege

$$= \sin v - \frac{\sin^3 v}{3} + C \text{ gefunden wird.}$$

Wenn $n = 5$, so ist $\int \cos^5 v \, . \, dv = \frac{\sin v}{5}\left(\cos^4 v + \frac{4}{3}\cos^2 v + \frac{8}{3}\right) + C$. —

3) Ich setze im $\int \frac{x^{mn-1} \, . \, dx}{\sqrt{1-x^n}}$ jetzt $n = 1$, so ist

$$\int \frac{x^{m-1} \, . \, dx}{\sqrt{1-x}} = - \frac{2\sqrt{1-x}}{2m-1}\left\{x^{m-1} + \frac{2(m-1)}{2m-3}x^{m-2} + \frac{4(m-1)(m-2)}{(2m-3)(2m-5)}x^{m-3} + \frac{8(m-1)(m-2)(m-3)}{(2m-3)(2m-5)(2m-7)}x^{m-4} + \ldots\ldots\right\} + C$$

oder, wenn $m - 1 = n$

$$\int\frac{x^n \cdot dx}{\sqrt{1-x}} = -\frac{2\sqrt{1-x}}{2n+1}\left\{x^n + \left(\frac{2n}{2n-1}\right)x^{n-1} + \frac{4n(n-1)}{(2n-1)(2n-3)}x^{n-2} + \frac{8n(n-1)(n-2)}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)}x^{n-3} + \ldots\ldots\right\} + C.$$

4) Im $\int\frac{x^{mn-1} \cdot dx}{\sqrt{1-x^n}}$ sei $n = 3$ so ist

$$\int\frac{x^{3m-1} \cdot dx}{\sqrt{1-x^3}} = -\frac{2\sqrt{1-x^3}}{3(2m-1)}\left\{x^{(m-1)3} + \frac{2(m-1)}{2m-3}x^{(m-2)3} + \frac{4(m-1)(m-2)}{(2m-3)(2m-5)}x^{(m-3)3} + \frac{8(m-1)(m-2)(m-3)}{(2m-3)(2m-5)(2m-7)}x^{(m-4)3} + \ldots\right\} + C$$

oder, wenn ich $3m - 1 = n$ setze

$$\int\frac{x^n \cdot dx}{\sqrt{1-x^3}} = -\frac{2\sqrt{1-x^3}}{3\cdot\left(\frac{2n-1}{3}\right)}\left\{x^{n-2} + \frac{2\cdot\left(\frac{n-2}{3}\right)}{\left(\frac{2n-7}{3}\right)}x^{n-5} + \frac{4\cdot\left(\frac{n-2}{3}\right)\left(\frac{n-5}{3}\right)}{\left(\frac{2n-7}{3}\right)\left(\frac{2n-13}{3}\right)}x^{n-8} + \frac{8\cdot\left(\frac{n-2}{3}\right)\left(\frac{n-5}{3}\right)\left(\frac{n-8}{3}\right)}{\left(\frac{2n-7}{3}\right)\left(\frac{2n-13}{3}\right)\left(\frac{2n-19}{3}\right)}x^{n-11} + \ldots\ldots\right\} + C$$

also

$$\int\frac{x^n \cdot dx}{\sqrt{1-x^3}} = -\frac{2\sqrt{1-x^3}}{2n-1}\left\{x^{n-2} + \frac{2(n-2)}{2n-7}x^{n-5} + \frac{4(n-2)(n-5)}{(2n-7)(2n-13)}x^{n-8} + \frac{8(n-2)(n-5)(n-8)}{(2n-7)(2n-13)(2n-19)}x^{n-11} + \frac{16(n-2)(n-5)(n-8)(n-11)}{(2n-7)(2n-13)(2n-19)(2n-25)}x^{n-14} + \ldots\right\} + C.$$

Diese Reihe enthält zugleich die Determination, in welchen Fällen die Integration in geschlossener Form gelingt; dieses ist der Fall, wenn $n = 2$, $n = 5$, $n = 8$, $n = 11$ u. s. w. Es sei z. B. $n = 5$, so ergiebt die Reihe

$\int\frac{x^5 \cdot dx}{\sqrt{1-x^3}} = -\frac{2\sqrt{1-x^3}}{9}(x^3+2) + C$, und allerdings lassen sich die in Rede stehenden Integrale auch leicht direct finden.

Wenn $\sqrt{1-x^3} = v$, so ist $1 - x^3 = v^2$, $1 - v^2 = x^3$, daher $x^6 = (1-v^2)^2$ und $6x^5 \cdot dx = -4v(1-v^2)dv$, also $x^5 \cdot dx = -\frac{2}{3}v(1-v^2)dv$, es ist mithin zu finden

$$\int -\left(\frac{2}{3}\right)\frac{v(1-v^2)dv}{v} = -\frac{2}{3}\int(1-v^2)dv = -\frac{2}{3}v + \frac{2}{3}\cdot\frac{v^3}{3} + C, \text{ daher}$$

$$\int\frac{x^5 \cdot dx}{\sqrt{1-x^3}} = -\frac{2}{3}\sqrt{1-x^3} + \frac{2}{9}(1-x^3)\sqrt{1-x^3} + C = \sqrt{1-x^3}\left\{-\frac{2}{3} + \frac{2}{9} - \frac{2}{9}x^3\right\} + C$$

$$= \sqrt{1-x^3}\left(-\frac{4}{9} - \frac{2}{9}x^3\right) + C = -\frac{2}{9}\sqrt{1-x^3}(x^3+2) + C. \text{ —}$$

Zur directen Auffindung des $\int\frac{x^{mn-1} \cdot dx}{\sqrt{1-x^n}}$ sei $\sqrt{1-x^n} = v$, also

$1-x^n = v^2$ und $1-v^2 = x^n$. Daher ist $(1-v^2)^m = x^{mn}$ und $mnx^{mn-1} \cdot dx = m(1-v^2)^{m-1} \cdot (-2v)dv$, also $x^{mn-1} \cdot dx = -\frac{2}{n}v(1-v^2)^{m-1} \cdot dv$; es ist daher zu finden

$\int -\frac{2}{n}\cdot\frac{v(1-v^2)^{m-1} \cdot dv}{v} = -\frac{2}{n}\int(1-v^2)^{m-1} \cdot dv$. Nenne ich einstweilen $m - 1 = p$, so ist

$$-\frac{2}{n}\int(1-v^2)^{m-1} \cdot dv = -\frac{2}{n}\int\left(1 - \frac{p}{1}v^2 + \frac{p(p-1)}{1.\ 2}v^4 - \frac{p(p-1)(p-2)}{1.\ 2.\ 3}v^6 + \ldots\right)dv$$

$$= -\frac{2}{n}\left\{v - \frac{p}{1}\cdot\frac{v^3}{3} + \frac{p(p-1)}{1.\ 2}\cdot\frac{v^5}{5} - \frac{p(p-1)(p-2)}{1.\ 2.\ 3}\cdot\frac{v^7}{7} + \ldots\ldots\right\} + C, \text{ also}$$

$$\int\frac{x^{mn-1} \cdot dx}{\sqrt{1-x^n}} = -\frac{2}{n}\sqrt{1-x^n}\left\{1 - \frac{(m-1)(1-x^n)}{1.\ 3} + \frac{(m-1)(m-2)(1-x^n)^2}{1.\ 2.\ 5} - \frac{(m-1)(m-2)(m-3)(1-x^n)^3}{1.\ 2.\ 3.\ 7} + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(1-x^n)^4}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 9} - \ldots\right\} + C.$$

Wenn $m = 2$, so ist

$$\int\frac{x^{2n-1} \cdot dx}{\sqrt{1-x^n}} = -\frac{2}{n}\sqrt{1-x^n}\left(1 - \frac{1-x^n}{3}\right) + C = -\frac{2}{n}\sqrt{1-x^n}\left(\frac{2+x^n}{3}\right) + C = -\frac{2\sqrt{1-x^n}}{3n}(x^n+2) + C.$$

Wenn $m = 3$, so ist

$$\int\frac{x^{3n-1} \cdot dx}{\sqrt{1-x^n}} = -\frac{2}{n}\sqrt{1-x^n}\left\{1 - \frac{2(1-x^n)}{1.\ 3} + \frac{2.1.(1-x^n)^2}{1.2.\ 5}\right\} + C = -\frac{2}{n}\sqrt{1-x^n}\left\{1 - \frac{2-2x^n}{3} + \frac{1-2x^n+x^{2n}}{5}\right\} + C$$

$$= -\frac{2}{n}\sqrt{1-x^n}\left\{\frac{15 - 10 + 10x^n + 3 - 6x^n + 3x^{2n}}{15}\right\} + C$$

$$= -\frac{2\sqrt{1-x^n}}{15n}\left\{3x^{2n} + 4x^n + 8\right\} + C, \text{ welche Resultate mit den früheren übereinstimmen.}$$

§. 3.

Im $\int x^{mn-1}.\left(1-x^n\right)^p.\,dx$ kann man den Grössen m, n und p die verschiedensten Werthe geben und danach die Reihe, in welche dieses Integral entwickelt ist, umformen. Wenn z. B. $p = +\frac{1}{2}$, so ist

$$\int x^{mn-1}.\sqrt{1-x^n}.\,dx = -\frac{(1-x^n)^{\frac{3}{2}}}{n(m+\frac{1}{2})}\left\{x^{(m-1)n} + \left(\frac{m-1}{m-\frac{1}{2}}\right)x^{(m-2)n} + \frac{(m-1)(m-2)}{(m-\frac{1}{2})(m-\frac{3}{2})}x^{(m-3)n} + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{(m-\frac{1}{2})(m-\frac{3}{2})(m-\frac{5}{2})}x^{(m-4)n} + \ldots\right\} + C$$

$$= -\frac{2(1-x^n)^{\frac{3}{2}}}{n(2m+1)}\left\{x^{(m-1)n} + \frac{2(m-1)}{2m-1}x^{(m-2)n} + \frac{4(m-1)(m-2)}{(2m-1)(2m-3)}x^{(m-3)n} + \frac{8(m-1)(m-2)(m-3)}{(2m-1)(2m-3)(2m-5)}x^{(m-4)n} + \ldots\right\} + C.$$

Wenn $p = -\frac{1}{3}$, so ist

$$\int \frac{x^{mn-1}.\,dx}{\sqrt[3]{1-x^n}} = -\frac{(1-x^n)^{\frac{2}{3}}}{n(m-\frac{1}{3})}\left\{x^{(m-1)n} + \left(\frac{m-1}{m-\frac{4}{3}}\right)x^{(m-2)n} + \frac{(m-1)(m-2)}{(m-\frac{4}{3})(m-\frac{7}{3})}x^{(m-3)n} + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{(m-\frac{4}{3})(m-\frac{7}{3})(m-\frac{10}{3})}x^{(m-4)n} + \ldots\ldots\right\} + C$$

$$= -\frac{3(1-x^n)^{\frac{2}{3}}}{n(3m-1)}\left\{x^{(m-1)n} + \frac{3(m-1)}{3m-4}x^{(m-2)n} + \frac{9(m-1)(m-2)}{(3m-4)(3m-7)}x^{(m-3)n} + \frac{27(m-1)(m-2)(m-3)}{(3m-4)(3m-7)(3m-10)}x^{(m-4)n} + \ldots\ldots\right\} + C. -$$

$$\text{Im} \int x^{mn-1}.\left(1-x^m\right)^p.\,dx = -\frac{(1-x^m)^{p+1}}{m(n+p)}\left\{x^{(n-1)m} + \left(\frac{n-1}{n+p-1}\right)x^{(n-2)m} + \frac{(n-1)(n-2)}{(n+p-1)(n+p-2)}x^{(n-3)m} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{(n+p-1)(n+p-2)(n+p-3)}x^{(n-4)m} + \ldots\right\} + C$$

sei $p = 0$, dnnn entsteht

$$\int x^{mn-1}.\,dx = \frac{x^{mn}}{mn} = -\frac{(1-x^m)}{mn}\left\{x^{(n-1)m} + \left(\frac{n-1}{n-1}\right)x^{(n-2)m} + \frac{(n-1)(n-2)}{(n-1)(n-2)}x^{(n-3)m} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{(n-1)(n-2)(n-3)}x^{(n-4)m} + \ldots\ldots\right\} \text{ oder}$$

$$-\frac{x^{mn}}{1-x^m} = x^{(n-1)m} + x^{(n-2)m} + x^{(n-3)m} + x^{(n-4)m} + \ldots\ldots$$

Wenn $p = 1$, so entsteht

$$\int x^{mn-1}.\,(1-x^m).\,dx = \frac{x^{mn}}{mn} - \frac{x^{mn+m}}{mn+m} = \frac{(n+1)x^{mn} - nx^{m(n+1)}}{mn(n+1)}$$

$$= -\frac{(1-x^m)^2}{m(n+1)}\left\{x^{(n-1)m} + \left(\frac{n-1}{n}\right)x^{(n-2)m} + \frac{(n-1)(n-2)}{n(n-1)}x^{(n-3)m} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{n(n-1)(n-2)}x^{(n-4)m} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}x^{(n-5)m} + \ldots\right\}$$

$$= -\frac{(1-x^m)^2}{m(n+1)}\left\{x^{(n-1)m} + \left(\frac{n-1}{n}\right)x^{(n-2)m} + \left(\frac{n-2}{n}\right)x^{(n-3)m} + \left(\frac{n-3}{n}\right)x^{(n-4)m} + \left(\frac{n-4}{n}\right)x^{(n-5)m} + \ldots\ldots\right\} \text{ Daher}$$

$$\frac{(n+1)x^{mn} - nx^{m(n+1)}}{mn(n+1)} = -\frac{(1-x^m)^2}{mn(n+1)}\left\{nx^{(n-1)m} + (n-1)x^{(n-2)m} + (n-2)x^{(n-3)m} + (n-3)x^{(n-4)m} + \ldots\ldots\right\}$$

Es ist also

$$\text{I.)} \quad \frac{nx^{mn+m} - (n+1)x^{mn}}{(1-x^m)^2} = nx^{(n-1)m} + (n-1)x^{(n-2)m} + (n-2)x^{(n-3)m} + (n-3)x^{(n-4)m} + (n-4)x^{(n-5)m} + \ldots\ldots$$

oder durch x^{mn} dividirt

$$\frac{nx^m - (n+1)}{(1-x^m)^2} = nx^{-m} + (n-1)x^{-2m} + (n-2)x^{-3m} + (n-3)x^{-4m} + (n-4)x^{-5m} + \ldots\ldots$$

Wenn $-m = p$, so ist

$$nx^p + (n-1)x^{2p} + (n-2)x^{3p} + (n-3)x^{4p} + (n-4)x^{5p} + \ldots\ldots = \frac{nx^{-p} - (n+1)}{(1-x^{-p})^2} = \frac{nx^p - (n+1)x^{2p}}{(1-x^p)^2}$$

Ist z. B. $p = 1$, so ist

$$nx + (n-1)x^2 + (n-2)x^3 + (n-3)x^4 + \ldots\ldots = \frac{nx - (n+1)x^2}{(1-x)^2}$$

Ist $p = 2$, so ist

$$nx^2 + (n-1)x^4 + (n-2)x^6 + (n-3)x^8 + \ldots\ldots = \frac{nx^2 - (n+1)x^4}{(1-x^2)^2}$$

Wenn in der Gleichung I. $m = 1$ angenommen wird, so entsteht

$$nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + (n-2)x^{n-3} + (n-3)x^{n-4} + \ldots\ldots = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n}{(1-x)^2}. -$$

Im $\int x^{mn-1} . (1-x^m)^p . dx$ sei $p = 2$, dann entsteht

$$\int x^{mn-1} . (1-x^m)^2 . dx = \int x^{mn-1} . (1-2x^m+x^{2m}) . dx = \frac{x^{mn}}{mn} - \frac{2 . x^{mn+m}}{mn+m} + \frac{x^{mn+2m}}{mn+2m}$$

$$= \frac{x^{mn}}{mn} - \frac{2x^{m(n+1)}}{m(n+1)} + \frac{x^{m(n+2)}}{m(n+2)} = \frac{(n+1)(n+2)x^{mn} - 2n(n+2)x^{m(n+1)} + n(n+1)x^{m(n+2)}}{mn(n+1)(n+2)}$$

$$= -\frac{(1-x^m)^3}{m(n+2)}\left\{x^{(n-1)m} + \left(\frac{n-1}{n+1}\right)x^{(n-2)m} + \frac{(n-1)(n-2)}{(n+1) . n}x^{(n-3)m} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{(n+1) . n . (n-1)}x^{(n-4)m} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{(n+1) . n (n-1)(n-2)}x^{(n-5)m} + \ldots .\right\}$$

$$= -\frac{(1-x^m)^3}{m(n+2)}\left\{\frac{n(n+1)}{n(n+1)}x^{(n-1)m} + \frac{n(n-1)}{n(n+1)}x^{(n-2)m} + \frac{(n-1)(n-2)}{n(n+1)}x^{(n-3)m} + \frac{(n-2)(n-3)}{n(n+1)}x^{(n-4)m} + \frac{(n-3)(n-4)}{n(n+1)}x^{(n-5)m} + \ldots . .\right\}$$

Daher ist auch

$$\frac{2n(n+2)x^{mn+m} - (n+1)(n+2)x^{mn} - n(n+1)x^{mn+2m}}{(1-x^m)^3}$$

$$= (n+1)nx^{mn-m} + n(n-1)x^{mn-2m} + (n-1)(n-2)x^{mn-3m} + (n-2)(n-3)x^{mn-4m} + \ldots . .$$

oder durch x^{mn} dividirt

$$\frac{-(n+1)(n+2) + 2n(n+2)x^m - n(n+1)x^{2m}}{(1-x^m)^3} = (n+1)nx^{-m} + n(n-1)x^{-2m} + (n-1)(n-2)x^{-3m} + (n-2)(n-3)x^{-4m} + \ldots . .$$

Wenn nun $-m = p$, so ist

$$(n+1)nx^p + n(n-1)x^{2p} + (n-1)(n-2)x^{3p} + (n-2)(n-3)x^{4p} + (n-3)(n-4)x^{5p} + \ldots . .$$

$$= \frac{-(n+1)(n+2) + 2n(n+2)x^{-p} - n(n+1)x^{-2p}}{(1-x^{-p})^3} = \frac{(n+1)(n+2)x^{3p} - 2n(n+2)x^{2p} + n(n+1)x^p}{(1-x^p)^3}$$

oder es ist auch

$$n(n-1)x^p + (n-1)(n-2)x^{2p} + (n-2)(n-3)x^{3p} + (n-3)(n-4)x^{4p} + \ldots . .$$

$$= \frac{n(n-1)x^p - 2(n+1)(n-1)x^{2p} + n(n+1)x^{3p}}{(1-x^p)^3}$$

Im $\int x^{mn-1} . (1-x^m)^p . dx$ sei $p = 3$, so entsteht

$$\int x^{mn-1} . (1-x^m)^3 . dx = \int x^{mn-1} . (1-3x^m + 3x^{2m} - x^{3m}) . dx = \frac{x^{mn}}{mn} - \frac{3x^{mn+m}}{mn+m} + \frac{3x^{mn+2m}}{mn+2m} - \frac{x^{mn+3m}}{mn+3m}$$

$$= \frac{x^{mn}}{mn} - \frac{3x^{m(n+1)}}{m(n+1)} + \frac{3x^{m(n+2)}}{m(n+2)} - \frac{x^{m(n+3)}}{m(n+3)}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)x^{mn} - 3n(n+2)(n+3)x^{m(n+1)} + 3n(n+1)(n+3)x^{m(n+2)} - n(n+1)(n+2)x^{m(n+3)}}{mn(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$= -\frac{(1-x^m)^4}{m(n+3)}\left\{x^{(n-1)m} + \left(\frac{n-1}{n+2}\right)x^{(n-2)m} + \frac{(n-1)(n-2)}{(n+2)(n+1)}x^{(n-3)m} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{(n+2)(n+1) . n}x^{(n-4)m} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{(n+2)(n+1) . n (n-1)}x^{(n-5)m}\right.$$
$$\left. + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{(n+2)(n+1) . n (n-1)(n-2)}x^{(n-6)m} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}{(n+2)(n+1) . n (n-1)(n-2)(n-3)}x^{(n-7)m} + \ldots . .\right\}$$

$$= \frac{-(1-x^m)^4}{mn(n+1)(n+2)(n+3)}\left\{n(n+1)(n+2)x^{(n-1)m} + n(n+1)(n-1)x^{(n-2)m} + n(n-1)(n-2)x^{(n-3)m} + (n-1)(n-2)(n-3)x^{(n-4)m} + \ldots\right\}$$

Daher ist auch

$$\frac{n(n+1)(n+2)x^{mn+3m} - 3n(n+1)(n+3)x^{mn+2m} + 3n(n+2)(n+3)x^{mn+m} - (n+1)(n+2)(n+3)x^{mn}}{(1-x^m)^4}$$

$$= (n+2)(n+1) . nx^{(n-1)m} + (n+1)n(n-1)x^{(n-2)m} + n(n-1)(n-2)x^{(n-3)m} + (n-1)(n-2)(n-3)x^{(n-4)m} + ..$$

oder auch

$$(n+2)(n+1)nx^p + (n+1)n(n-1)x^{2p} + n(n-1)(n-2)x^{3p} + (n-1)(n-2)(n-3)x^{4p} + (n-2)(n-3)(n-4)x^{5p} + \ldots .$$

$$= \frac{(n+2)(n+1)nx^p - 3n(n+1)(n+3)x^{2p} + 3n(n+2)(n+3)x^{3p} - (n+1)(n+2)(n+3)x^{4p}}{(1-x^p)^4}.$$ — u. s. w.

§. 4.

Es war

$$\int x^{mn-1}.\left(1-x^n\right)^p.\,dx = -\frac{(1-x^n)^{p+1}}{n(m+p)}\left\{x^{(m-1)n}+\frac{(m-1)}{(m+p-1)}x^{(m-2)n}+\frac{(m-1)(m-2)}{(m+p-1)(m+p-2)}x^{(m-3)n}+\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{(m+p-1)(m+p-2)(m+p-3)}x^{(m-4)n}+\ldots\right\}+C$$

Wenn $p = -1$, so entsteht

$$\int\frac{x^{mn-1}.\,dx}{1-x^n} = -\frac{1}{n(m-1)}\left\{x^{(m-1)n}+\left(\frac{m-1}{m-2}\right)x^{(m-2)n}+\frac{(m-1)(m-2)}{(m-2)(m-3)}x^{(m-3)n}+\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{(m-2)(m-3)(m-4)}x^{(m-4)n}+\ldots\ldots\right\}+C$$

$$= -\frac{1}{n}\left\{\frac{x^{(m-1)n}}{m-1}+\frac{x^{(m-2)n}}{m-2}+\frac{x^{(m-3)n}}{m-3}+\frac{x^{(m-4)n}}{m-4}+\ldots\ldots\right\}+C.$$

Diese Reihe ist für positive ganze Werthe des m unbrauchbar. Ich suche daher zu einer andern Form zu gelangen.

Es sei $1-x^n = v$, dann ist $1-v = x^n$, $x^{mn} = (1-v)^m$, daher

$x^{mn-1}.\,dx = -\frac{1}{n}(1-v)^{m-1}.\,dv$. Es wird also $\int\frac{x^{mn-1}.\,dx}{1-x^n}$

$$= \int -\left(\frac{1}{n}\right)\frac{(1-v)^{m-1}.\,dv}{v} = \left(-\frac{1}{n}\right)\int\frac{(1-v)^{m-1}.\,dv}{v} \text{ oder wenn } m-1 = p,$$

$$= \left(-\frac{1}{n}\right)\int\left\{\frac{1-\frac{p}{1}v+\frac{p(p-1)}{1.\,2}v^2-\frac{p(p-1)(p-2)}{1.\,2.\,3}v^3+\frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{1.\,2.\,3.\,4}v^4-\ldots\ldots}{v}\right\}dv$$

$$= \left(-\frac{1}{n}\right)\left\{l(v)-\frac{(m-1)}{1}\left(\frac{v}{1}\right)+\frac{(m-1)(m-2)}{1.\,2}\left(\frac{v^2}{2}\right)-\frac{(m-1)(m-2)(m-1)}{1.\,2.\,3}\left(\frac{v^3}{3}\right)+\frac{(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.\,2.\,3.\,4}\left(\frac{v^4}{4}\right)+\ldots\ldots\right\}+C.$$

Daher ist

1.) $$\int\frac{x^{mn-1}.\,dx}{1-x^n} = -\frac{1}{n}l(1-x^n)+\frac{1}{n}\left\{\left(\frac{m-1}{1}\right)\frac{(1-x^n)}{1}-\frac{(m-1)(m-2)}{1.\,2}\frac{(1-x^n)^2}{2}+\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1.\,2.\,3}\frac{(1-x^n)^3}{3}-\frac{(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.\,2.\,3.\,4}\frac{(1-x^n)^4}{4}+\ldots\right\}+C.$$

Es sei $m = 5$, dann muss sein

$$\int\frac{x^{5n-1}.\,dx}{1-x^n} = -\frac{1}{n}l(1-x^n)+\frac{1}{n}\left\{4(1-x^n)-\frac{4.\,3}{4}(1-x^n)^2-\frac{4.\,3.\,2}{2.\,1.\,3}(1-x^n)^3-\frac{4.\,3.\,2.\,1}{2.\,3.\,4.\,4}(1-x^n)^4\right\}+C$$

$$= -\frac{1}{n}l(1-x^n)+\frac{1}{n}\left\{4-4x^n-3(1-2x^n+x^{2n})+\frac{4}{3}(1-3x^n+3x^{2n}-x^{3n})-\frac{1}{4}(1-4x^n+6x^{2n}-4x^{3n}+x^{4n})\right\}+C$$

$$= -\frac{1}{n}l(1-x^n)+\frac{1}{n}\left\{\frac{25}{12}-x^n-\frac{1}{2}x^{2n}-\frac{1}{3}x^{3n}-\frac{1}{4}x^{4n}\right\}+C$$

$$= -\frac{1}{n}l(1-x^n)-\frac{1}{n}\left\{x^n+\frac{1}{2}x^{2n}+\frac{1}{3}x^{3n}+\frac{1}{4}x^{4n}\right\}+C.$$

Die für $\int\frac{x^{5n-1}.\,dx}{1-x^n}$ speciell gefundene Form, sowie der Umstand, dass je grösser m gewählt wird, zu einer desto höhern Potenz von $(1-x^n)$ aufgestiegen werden muss, machen es wünschenswerth, noch eine andere Form zu finden.

Wenn $y = l(1-x^n)$, ist $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-x^n}\cdot(-n)x^{n-1}$, also

$$dy = \frac{-nx^{n-1}.\,dx}{1-x^n}$$

$$y = -n\int\frac{x^{n-1}.\,dx}{1-x^n} = l(1-x^n)+C, \text{ also } 1)\int\frac{x^{n-1}.\,dx}{1-x^n} = -\frac{1}{n}l(1-x^n)+C.$$

Ferner ist $\int\frac{x^{n-1}.\,dx}{1-x^n}-\int\frac{x^{2n-1}.\,dx}{1-x^n} = \int\frac{x^{n-1}(1-x^n).\,dx}{1-x^n} = \frac{x^n}{n}+C$, also

2) $\int\frac{x^{2n-1}.\,dx}{1-x^n} = -\frac{1}{n}l(1-x^n)-\frac{x^n}{n}+C$. Ebenso ist:

$$\int\frac{x^{2n-1}.\,dx}{1-x^n}-\int\frac{x^{3n-1}.\,dx}{1-x^n} = \int\frac{x^{2n-1}(1-x^n).\,dx}{1-x^n} = \frac{x^{2n}}{2n}+C, \text{ daher}$$

$\int \frac{x^{3n-1} \cdot dx}{1-x^n} = -\frac{1}{n}\, l\left(1-x^n\right) - \frac{x^n}{n} - \frac{x^{2n}}{2n} + C.$ Ich kenne also

1) $\int \frac{x^{n-1} \cdot dx}{1-x^n} = -\frac{1}{n}\, l\left(1-x^n\right) + C.$

2) $\int \frac{x^{2n-1} \cdot dx}{1-x^n} = -\frac{1}{n}\, l\left(1-x^n\right) - \frac{x^n}{n} + C.$

3) $\int \frac{x^{3n-1} \cdot dx}{1-x^n} = -\frac{1}{n}\, l\left(1-x^n\right) - \frac{2x^n + x^{2n}}{2n} + C.$ Ebenso finde ich noch

4) $\int \frac{x^{4n-1} \cdot dx}{1-x^n} = -\frac{1}{n}\, l\left(1-x^n\right) - \frac{6x^n + 3x^{2n} + 2x^{3n}}{6n} + C.$

5) $\int \frac{x^{5n-1} \cdot dx}{1-x^n} = -\frac{1}{n}\, l\left(1-x^n\right) - \frac{12x^n + 6x^{2n} + 4x^{3n} + 3x^{4n}}{12n} + C$ u. s. w.

Das $-\frac{1}{n}\, l\,(1-x^n)$ ist also allen Integralen gemeinschaftlich; die Coefficienten der Zähler der Brüche sind so beschaffen, dass z. B. in No. 5 die 6 die Hälfte der 12, die 4 der 3te Theil der 12, die 3 der 4te Theil von 12 ist. In No. 4 ist die 3 die Hälfte der 6, die 2 der 3te Theil der 6; in No. 3 scheint dasselbe Gesetz zu bestehen. Im $\int \frac{x^{5n-1} \cdot dx}{1-x^n}$ steigen die Potenzen bis x^{4n}, im $\int \frac{x^{4n-1} \cdot dx}{1-x^n}$ bis x^{3n}, im $\int \frac{x^{3n-1} \cdot dx}{1-x^n}$ bis x^{2n}; es ist daher wahrscheinlich, dass im $\int \frac{x^{mn-1} \cdot dx}{1-x^n}$ sich die Potenzen bis $x^{(m-1)n}$ erstrecken werden.

Unter diesen Annahmen wende ich die Methode der unbestimmten Coefficienten, wie folgt, an. Es sei

$$\int \frac{x^{mn-1} \cdot dx}{1-x^n} = -\frac{1}{n}\, l\left(1-x^n\right) - \frac{px^n + \frac{p}{2}x^{2n} + \frac{p}{3}x^{3n} + \ldots\ldots\ldots + (m-2)x^{(m-1)n}}{pn} + C,$$

folglich differenzirt

$$\frac{x^{mn-1}}{1-x^n} = \left(-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{1-x^n}(-n)\,x^{n-1} - \frac{1}{pn}\left\{pnx^{n-1} + \frac{p}{2}\cdot 2nx^{2n-1} + \frac{p}{3}\cdot 3nx^{3n-1} + \ldots\ldots + (m-2)(m-1)\,nx^{mn-n-1}\right\}$$

oder, mit $1 - x^n$ multiplicirt, und die Summe durch pn dividirt

$$x^{mn-1} = x^{n-1} - \left\{x^{n-1} + x^{2n-1} + x^{3n-1} + \ldots\ldots + \frac{(m-1)(m-2)}{p}x^{mn-n-1}\right\}\left(1-x^n\right) \text{ oder}$$

$$x^{mn-1} = x^{n-1} - \left\{x^{n-1} + x^{2n-1} + x^{3n-1} + \ldots + \frac{(m-1)(m-2)}{p}x^{mn-n-1}\right.$$
$$\left. - x^{2n-1} - x^{3n-1} - \ldots\ldots\ldots - \frac{(m-1)(m-2)}{p}x^{mn-1}\right\}$$

Die Auflösung der Klammer ergiebt

$x^{mn-1} = \frac{(m-1)(m-2)}{p}x^{mn-1}$, daher $p = (m-1)(m-2)$

Weiter brauche ich nichts zu wissen, da ich die andern Coefficienten vorgreifend mit $\frac{p}{2}, \frac{p}{3}, \frac{p}{4}$ u. s. w. bezeichnet habe. Es ist also

$$\int \frac{x^{mn-1} \cdot dx}{1-x^n} = -\frac{1}{n}\, l\,(1-x^n) - \frac{(m-1)(m-2)x^n + \frac{(m-1)(m-2)}{2}x^{2n} + \frac{(m-1)(m-2)}{3}x^{3n} + \ldots + (m-2)x^{(m-1)n}}{(m-1)(m-2)n} + C \text{ oder}$$

I.) $$\int \frac{x^{mn-1} \cdot dx}{1-x^n} = -\frac{1}{n}\, l\,(1-x^n) - \left\{\frac{x^n}{n} + \frac{x^{2n}}{2n} + \frac{x^{3n}}{3n} + \ldots\ldots + \frac{x^{(m-1)n}}{(m-1)n}\right\} + C$$

Wenn z. B. $n = 1$, so ist

$$\int \frac{x^{m-1} \cdot dx}{1-x} = -\,l\,(1-x) - \left\{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots\ldots + \frac{x^{m-1}}{m-1}\right\} + C$$

oder wenn hierin $m - 1 = n$

$$\int \frac{x^n \cdot dx}{1-x} = -\,l\,(1-x) - \left\{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots\ldots + \frac{x^n}{n}\right\} + C$$

Wenn in der Gleichung I. $n = 3$, so ist

$$\int \frac{x^{3m-1} \cdot dx}{1-x^3} = -\frac{1}{3}\, l\,(1-x^3) - \left\{\frac{x^3}{3} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^9}{9} + \frac{x^{12}}{12} + \ldots\ldots + \frac{x^{(m-1)3}}{(m-1)3}\right\} + C$$

oder wenn $3m - 1 = n$, also $m = \frac{n+1}{1}$ und $m - 1 = \frac{n-2}{3}$, dann entsteht

$$\int \frac{x^n . dx}{1-x^3} = -\frac{1}{1}\, l(1-x^3) - \left\{\frac{x^3}{1} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^9}{9} + \frac{x^{12}}{12} + \ldots . + \frac{x^{n-2}}{n-2}\right\} + C$$

Hierbei muss $n - 2$ ein Vielfaches von 3 sein, wenn das Integral gelingen soll. Wenn $n = 17$ und $n - 2 = 15$, so ist

$$\int \frac{x^{17} . dx}{1-x^3} = -\frac{1}{1}\, l(1-x^3) - \left\{\frac{x^3}{1} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^9}{9} + \frac{x^{12}}{12} + \frac{x^{15}}{15}\right\} + C$$

Wenn in der Gleichung I. $n = 2$, so folgt

$$\int \frac{x^{2m-1} . dx}{1-x^2} = -\frac{1}{2}\, l(1-x^2) - \left\{\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{8} + \ldots\ldots + \frac{x^{(m-1)2}}{(m-1)2}\right\} + C$$

oder wenn $2m - 1 = n$, so ist

$$\int \frac{x^n . dx}{1-x^2} = -\frac{1}{2}\, l(1-x^2) - \left\{\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{8} + \ldots\ldots + \frac{x^{n-1}}{n-1}\right\} + C$$

Weil aber x^{n-1} das letzte Glied der aufsteigenden Reihe der geraden Potenzen von x ist, muss $n - 1$ eine positive gerade Zahl sein; auch hier besteht also die Einschränkung, dass n ungerade sein muss, wenn das Integral gelingen soll. Dies führt darauf, sogleich folgende Function zu betrachten.

Wenn $y = l\left(\frac{1+x^n}{1-x^n}\right)$, so ist

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{1-x^n}{1+x^n}\right) \frac{(1-x^n)\, nx^{n-1} - (1+x^n)(-n)\, x^{n-1}}{(1-x^n)^2} = \frac{2nx^{n-1}}{(1+x^n)(1-x^n)} = \frac{2nx^{n-1}}{1-x^{2n}}, \text{ daher}$$

$$y = 2n \int \frac{x^{n-1} . dx}{1-x^{2n}} = l\left(\frac{1+x^n}{1-x^n}\right) \text{ oder}$$

1) $\int \frac{x^{n-1} . dx}{1-x^{2n}} = \frac{1}{2n}\, l\left(\frac{1+x^n}{1-x^n}\right) + C.$

Wenn ferner $y = l(1-x^{2n})$, so ist $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-x^{2n}} \cdot (-2n)\, x^{2n-1}$, daher

$$y = -2n \int \frac{x^{2n-1} . dx}{1-x^{2n}} = l(1-x^{2n}), \text{ folglich ist}$$

2) $\int \frac{x^{2n-1} . dx}{1-x^{2n}} = -\frac{1}{2n}\, l(1-x^{2n}) + C.$ Es ist ferner

$$\int \frac{x^{n-1} . dx}{1-x^{2n}} - \int \frac{x^{3n-1} . dx}{1-x^{2n}} = \int \frac{x^{n-1}(1-x^{2n})\, dx}{1-x^{2n}} = \frac{x^n}{n} + C, \text{ daher}$$

3) $\int \frac{x^{3n-1} . dx}{1-x^{2n}} = \frac{1}{2n}\, l\left(\frac{1+x^n}{1-x^n}\right) - \frac{x^n}{n} + C.$ Demnächst ist

$$\int \frac{x^{2n-1} . dx}{1-x^{2n}} - \int \frac{x^{4n-1} . dx}{1-x^{2n}} = \int \frac{x^{2n-1}(1-x^{2n})\, dx}{1-x^{2n}} = \frac{x^{2n}}{2n} + C, \text{ folglich}$$

4) $\int \frac{x^{4n-1} . dx}{1-x^{2n}} = -\frac{1}{2n}\, l(1-x^{2n}) - \frac{x^{2n}}{2n} + C.$ Ebenso finde ich, um die Form dieser Integrale noch genauer kennen zu lernen,

5) $\int \frac{x^{5n-1} . dx}{1-x^{2n}} = \frac{1}{2n}\, l\left(\frac{1+x^n}{1-x^n}\right) - \left(\frac{3x^n + x^{3n}}{3n}\right) + C$

6) $\int \frac{x^{6n-1} . dx}{1-x^{2n}} = -\frac{1}{2n}\, l(1-x^{2n}) - \left(\frac{2x^{2n} + x^{4n}}{4n}\right) + C.$ Es ergeben sich also für die Verallgemeinerung dieser Integrale in $\int \frac{x^{mn-1} . dx}{1-x^{2n}}$ zwei Wege, je nachdem nämlich m gerade oder ungerade ist.

<u>Es sei zunächst für die geraden Werthe des m</u>

$$\int \frac{x^{mn-1} . dx}{1-x^{2n}} = -\frac{1}{2n}\, l(1-x^{2n}) - \left\{\frac{ax^{2n} + bx^{4n} + cx^{6n} + \ldots\ldots + fx^{(m-4)n} + gx^{(m-2)n}}{(m-2)n}\right\} + C$$

so ergiebt die differenzirte Gleichung folgende andere

$$\frac{x^{mn-1}}{1-x^{2n}} = \left(-\frac{1}{2n}\right)\left(\frac{-2nx^{2n-1}}{1-x^{2n}}\right) - \frac{1}{(m-2)n}\left\{2anx^{2n-1} + 4bnx^{4n-1} + 6cnx^{6n-1} + \ldots + fn(m-4)x^{mn-4n-1} + gn(m-2)x^{mn-2n-1}\right\}$$

oder mit $(m-2)(1-x^{2n})$ multiplicirt:

$$(m-2)x^{mn-1} = (m-2)x^{2n-1} - \left(1-x^{2n}\right)\left\{2ax^{2n-1} + 4bx^{4n-1} + 6cx^{6n-1} + \ldots + f(m-4)x^{mn-4n-1} + g(m-2)x^{mn-2n-1}\right\}$$ oder

$$\begin{aligned}(m-2)x^{mn-1} = {} & (m-2)x^{2n-1} \\ & - 2ax^{2n-1} - 4bx^{4n-1} - 6cx^{6n-1} - \ldots - f(m-4)x^{mn-4n-1} - g(m-2)x^{mn-2n-1} \\ & + 2ax^{4n-1} + 4bx^{6n-1} + \ldots\ldots + f(m-4)x^{mn-2n-1} + g(m-2)x^{mn-1}\end{aligned}$$

daher müssen folgende Gleichungen stattfinden

1) $-2a + m - 2 = o$ oder $a = \frac{m-2}{2}$

2) $2a - 4b = o$ oder $b = \frac{a}{2} = \frac{m-2}{4}$

3) $4b - 6c = o$ oder $c = \frac{2}{3}b = \frac{2(m-2)}{3 \cdot 4} = \frac{m-2}{6}$ u. s. w.

4) $g(m-2) = m-2$ oder $g = 1$

5) $f(m-4) - g(m-2) = o$ oder $f = \frac{m-2}{m-4}$. Es entsteht also

$$\int \frac{x^{mn-1} \cdot dx}{1-x^{2n}} = -\frac{1}{2n}\, l\,(1-x^{2n}) - \left\{\frac{\left(\frac{m-2}{2}\right)x^{2n} + \left(\frac{m-2}{4}\right)x^{4n} + \left(\frac{m-2}{6}\right)x^{6n} + \ldots + x^{(m-2)n}}{(m-2)n}\right\} + C$$ oder

1.) $\underline{\int \frac{x^{mn-1} \cdot dx}{1-x^{2n}} = -\frac{1}{2n}\, l\,(3-x^{2n}) - \left\{\frac{x^{2n}}{2n} + \frac{x^{4n}}{4n} + \frac{x^{6n}}{6n} + \ldots + \frac{x^{(m-2)n}}{(m-2)n}\right\} + C.}$

<u>wenn nämlich *m* gerade.</u>

<u>Es sei ferner für die ungeraden Werthe des *m*</u>

$$\int \frac{x^{mn-1} \cdot dx}{1-x^{2n}} = \frac{1}{2n}\, l\left(\frac{1+x^{n}}{1-x^{n}}\right) - \left\{\frac{ax^{n} + bx^{3n} + cx^{5n} + \ldots + fx^{(m-4)n} + gx^{(m-2)n}}{(m-2)n}\right\} + C$$

dann entsteht durch Differenziation

$$\frac{x^{mn-1}}{1-x^{2n}} = \frac{x^{n-1}}{1-x^{2n}} - \frac{1}{(m-2)n}\left\{anx^{n-1} + 3bnx^{3n-1} + 5cnx^{5n-1} + \ldots + fn(m-4)x^{mn-4n-1} + gn(m-2)x^{mn-2n-1}\right\}$$

oder mit $(m-2)(1-x^{2n})$ multiplizirt

$$(m-2)x^{mn-1} = (m-2)x^{n-1} - (1-x^{2n})\left\{ax^{n-1} + 3bx^{3n-1} + 5cx^{5n-1} + \ldots + f(m-4)x^{mn-4n-1} + g(m-2)x^{mn-2n-1}\right\}$$

oder

$$\begin{aligned}(m-2)x^{mn-1} = {} & (m-2)x^{n-1} \\ & - ax^{n-1} - 3bx^{3n-1} - 5cx^{5n-1} - \ldots - f(m-4)x^{mn-4n-1} - g(m-2)x^{mn-2n-1} \\ & + ax^{3n-1} + 3bx^{5n-1} + \ldots\ldots + f(m-4)x^{mn-2n-1} + g(m-2)x^{mn-1}\end{aligned}$$

Daher müssen folgende Gleichungen stattfinden:

1) $-a + m - 2 = o$ oder $a = m - 2$

2) $a - 3b = o$, also $b = \frac{a}{3} = \frac{m-2}{3}$

3) $3b - 5c = o$, also $c = \frac{3}{5}b = \frac{m-2}{5}$ u. s. w.

4) $g(m-2)x^{mn-1} = (m-2)x^{mn-1}$, also $g = 1$.

5) $f(m-4) - g(m-2) = o$, also $f = \frac{m-2}{m-4}$. Das Integral lautet also

$$\int \frac{x^{mn-1}\,.\,dx}{1-x^{2n}} = \left(\frac{1}{2n}\right) l\left(\frac{1+x^n}{1-x^n}\right) - \left\{\frac{\binom{m-2}{1}x^n + \binom{m-2}{3}x^{3n} + \binom{m-2}{5}x^{5n} + \ldots + \binom{m-2}{m-4}x^{(m-4)n} + x^{(m-2)n}}{(m-2)n}\right\} + C \text{ oder}$$

II.) $$\int \frac{x^{mn-1}\,.\,dx}{1-x^{2n}} = \left(\frac{1}{2n}\right) l\left(\frac{1+x^n}{1-x^n}\right) - \left\{\frac{x^n}{n} + \frac{x^{3n}}{3n} + \frac{x^{5n}}{5n} + \frac{x^{7n}}{7n} + \ldots + \frac{x^{(m-2)n}}{(m-2)n}\right\} + C$$

wenn nämlich m ungerade; und es war vorher

I.) $$\int \frac{x^{mn-1}\,.\,dx}{1-x^{2n}} = \left(-\frac{1}{2n}\right) l\left(1-x^{2n}\right) - \left\{\frac{x^{2n}}{2n} + \frac{x^{4n}}{4n} + \frac{x^{6n}}{6n} + \frac{x^{8n}}{8n} + \ldots + \frac{x^{(m-2)n}}{(m-2)n}\right\} + C$$

wenn nämlich m gerade.

Wenn in I.) $n = 1$, so ist

$$\int \frac{x^{m-1}\,.\,dx}{1-x^2} = -\frac{1}{2} l(1-x^2) - \left\{\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{6} + \ldots + \frac{x^{m-2}}{m-2}\right\} + C, \text{ oder auch wenn } m - 1 = n$$

$$\int \frac{x^n\,.\,dx}{1-x^2} = -\frac{1}{2} l(1-x^2) - \left\{\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{6} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{n-1}\right\} + C,$$

wobei $n - 1$ gerade, also n ungerade sein muss.

Wenn in II.) $n = 1$, so ist

$$\int \frac{x^{m-1}\,.\,dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} l\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \left\{\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots + \frac{x^{m-2}}{m-2}\right\} + C, \text{ oder wenn } m - 1 = n$$

$$\int \frac{x^n\,.\,dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} l\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \left\{\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{n-1}\right\} + C$$

wobei $n - 1$ ungerade, also n gerade sein muss. Uebrigens ist

$$\frac{1}{2} l\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots (in\ inf) \text{ und auch}$$

$$\frac{1}{2} l(1-x^2) = -\left\{\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{8} + \ldots (in\ inf)\right\}, \text{ daher das Integral für } n = \infty \text{ constant wird.}$$

Im $\int \frac{x^n\,.\,dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} l\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \left\{\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{n-1}\right\} + C$

sei $u = \frac{x^n}{1-x^2}$ und $v = x$, dann ist

$$\frac{du}{dx} = \frac{(1-x^2)nx^{n-1} - x^n(-2x)}{(1-x^2)^2}, \text{ also } du = \frac{nx^{n-1} - nx^{n+1} + 2x^{n+1}}{(1-x^2)^2} dx = \frac{nx^{n-1} - (n-2)x^{n+1}}{(1-x^2)^2} dx$$

Daher wird

$$v du = \frac{nx^n - (n-2)x^{n+2}}{(1-x^2)^2} dx = \frac{nx^n - nx^{n+2} + 2x^{n+2}}{(1-x^2)^2} dx = \frac{nx^n(1-x^2) + 2x^{n+2}}{(1-x^2)^2} dx, \text{ folglich}$$

$\int v du = \int \frac{nx^n\,.\,dx}{1-x^2} + \int \frac{2x^{n+2}\,.\,dx}{(1-x^2)^2}$. Es entsteht also folgende theilweise Integration

$$\int \frac{x^n\,.\,dx}{1-x^2} = \frac{x^{n+1}}{1-x^2} - n\int \frac{x^n\,.\,dx}{1-x^2} - 2\int \frac{x^{n+2}\,.\,dx}{(1-x^2)^2} \text{ oder}$$

$$(n+1)\int \frac{x^n\,.\,dx}{1-x^2} = \frac{x^{n+1}}{1-x^2} - 2\int \frac{x^{n+2}\,.\,dx}{(1-x^2)^2} \text{ also } \int \frac{x^{n+2}\,.\,dx}{(1-x^2)^2} = \frac{x^{n+1}}{2(1-x^2)} - \left(\frac{n+1}{2}\right)\int \frac{x^n\,.\,dx}{1-x^2}; \text{ mithin}$$

$$\int \frac{x^{n+2}\,.\,dx}{(1-x^2)^2} = \frac{x^{n+1}}{2(1-x^2)} - \left(\frac{n+1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} l\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \left(\frac{n+1}{2}\right)\left\{\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{n-1}\right\} + C$$

oder wenn $n + 2 = m$, so entsteht

1) $$\int \frac{x^m\,.\,dx}{(1-x^2)^2} = \frac{x^{m-1}}{2(1-x^2)} - \left(\frac{m-1}{4}\right) l\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \left(\frac{m-1}{2}\right)\left\{\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{m-3}}{m-3}\right\} + C$$

Das Integral gelingt für $m = 1$; ferner wenn $m - 3 = 1$, $m - 3 = 3$, $m - 3 = 5$, $m - 3 = 7$ u. s. w., also für $m = 4$, $m = 6$, $m = 8$, $m = 10$ u. s. w. überhaupt für m gerade. Merkwürdigerweise gelingt es auch für $m = 2$, wenn ich die Summe in Klammern unberücksichtigt lasse.

Es war also vorher

$$\int \frac{x^{n+2} \cdot dx}{(1-x^2)^2} = \frac{x^{n+1}}{2(1-x^2)} - \left(\frac{n+1}{2}\right) \int \frac{x^n \cdot dx}{1-x^2}$$, mithin, wenn ich für $\int \frac{x^n \cdot dx}{1-x^2}$ jetzt das andere Resultat wähle

$$\int \frac{x^{n+2} \cdot dx}{(1-x^2)^2} = \frac{x^{n+1}}{2(1-x^2)} - \left(\frac{n+1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) l\,(1-x^2) + \left(\frac{n+1}{2}\right)\left\{\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{6} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{n-1}\right\} + C$$

$$= \frac{x^{n+1}}{2(1-x^2)} + \left(\frac{n+1}{4}\right) l\,(1-x^2) + \left(\frac{n+1}{2}\right)\left\{\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{6} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{n-1}\right\} + C$$

oder wenn $n + 2 = m$ gewählt wird

2) $$\underline{\int \frac{x^m \cdot dx}{(1-x^2)^2} = \frac{x^{m-1}}{2(1-x^2)} + \left(\frac{m-1}{4}\right) l\,(1-x^2) + \left(\frac{m-1}{2}\right)\left\{\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{6} + \ldots + \frac{x^{m-3}}{m-3}\right\} + C}$$

Das Integral gelingt für $m - 3 = 2$, $m - 3 = 4$, $m - 3 = 6$, $m - 3 = 8$ u. s. w., also für $m = 5$, $m = 7$, $m = 9$, $m = 11$ u. s. w., überhaupt für <u>m ungerade.</u> Auch für $m = 3$ gelingt es, wenn ich die in Klammern eingeschlossene Summe fortlasse; es wird alsdann

$$\int \frac{x^3 \cdot dx}{(1-x^2)^2} = \frac{x^2}{2(1-x^2)} + \frac{2}{2}\, l\,(1-x^2) + C$$

Im $\int \frac{x^{mn-1} \cdot dx}{1-x^{2n}}$ für m gerade sei nun $n = 2$, so ist

$$\int \frac{x^{2m-1} \cdot dx}{1-x^4} = \left(-\frac{2}{4}\right) l\,(1-x^4) - \left\{\frac{x^4}{4} + \frac{x^8}{8} + \frac{x^{12}}{12} + \ldots + \frac{x^{(m-2)2}}{(m-2)2}\right\} + C$$

oder, wenn $2m - 1 = n$, also $m - 2 = \frac{n-3}{2}$ gewählt wird:

$$\int \frac{x^n \cdot dx}{1-x^4} = -\frac{1}{4}\, l\,(1-x^4) - \left\{\frac{x^4}{4} + \frac{x^8}{8} + \frac{x^{12}}{12} + \ldots + \frac{x^{n-3}}{n-3}\right\} + C$$

wobei $\frac{n-3}{4}$ eine ganze Zahl sein muss.

Die Integration gelingt für $n = 3$; ferner wenn $n - 3 = 4$, $n - 3 = 8$, $n - 3 = 12$ u. s. w., also für $n = 7$, $n = 11$, $n = 15$, $n = 19$, $n = 23$ u. s. w.

Wenn im $\int \frac{x^{mn-1} \cdot dx}{1-x^{2n}}$ für m ungerade $n = 2$ gewählt wird, so wird

$$\int \frac{x^{2m-1} \cdot dx}{1-x^4} = \frac{1}{4}\, l\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right) - \left\{\frac{x^2}{2} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^{10}}{10} + \frac{x^{14}}{14} + \ldots + \frac{x^{(m-2)2}}{(m-2)2}\right\} + C$$

oder wenn $2m - 1 = n$

$$\int \frac{x^n \cdot dx}{1-x^4} = \frac{1}{4}\, l\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right) - \left\{\frac{x^2}{2} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^{10}}{10} + \ldots + \frac{x^{n-3}}{n-3}\right\} + C$$

Die Integration gelingt für $n - 3 = 2$, $n - 3 = 6$, $n - 3 = 10$, $n - 3 = 14$ u. s. w.; also für $n = 5$, $n = 9$, $n = 13$, $n = 17$ u. s. w. —

Im $\int \frac{x^{mn-1} \cdot dx}{1-x^{2n}}$ für m gerade sei $n = 3$, so ist

$$\int \frac{x^{3m-1} \cdot dx}{1-x^6} = -\frac{1}{6}\, l\,(1-x^6) - \left\{\frac{x^6}{6} + \frac{x^{12}}{12} + \frac{x^{18}}{18} + \ldots + \frac{x^{(m-2)3}}{(m-2)3}\right\} + C$$

oder wenn $3m - 1 = n$, also $m - 2 = \frac{n-5}{3}$

$$\int \frac{x^n \cdot dx}{1-x^6} = -\frac{1}{6}\, l\,(1-x^6) - \left\{\frac{x^6}{6} + \frac{x^{12}}{12} + \frac{x^{18}}{18} + \ldots + \frac{x^{n-5}}{n-5}\right\} + C$$

Die Integration gelingt für $n = 5$ (alsdann fällt die Summe fort). Ferner für $n - 5 = 6$, $n - 5 = 12$, $n - 5 = 18$ u. s. w.; also für $n = 11$, $n = 17$, $n = 23$ u. s. w.

Nun sei im $\int \frac{x^{mn-1}.\,dx}{1-x^{2n}}$ für m ungerade, $n = 3$, so ist

$$\int \frac{x^{3m-1}.\,dx}{1-x^6} = \frac{1}{6}\, l\left(\frac{1+x^3}{1-x^3}\right) - \left\{\frac{x^3}{3} + \frac{x^9}{9} + \frac{x^{15}}{15} + \ldots + \frac{x^{(m-2)3}}{(m-2)3}\right\} + C$$

oder wenn $3m - 1 = n$

$$\int \frac{x^n.\,dx}{1-x^6} = \frac{1}{6}\, l\left(\frac{1+x^3}{1-x^3}\right) - \left\{\frac{x^3}{3} + \frac{x^9}{9} + \frac{x^{15}}{15} + \ldots + \frac{x^{n-5}}{n-5}\right\} + C$$

Die Integration gelingt für $n - 5 = 3$, $n - 5 = 9$, $n - 5 = 15$, $n - 5 = 21$ u. s. w.; also für $n = 8$, $n = 14$, $n = 20$, $n = 26$ u. s. w.

In dieser Weise kann man mit den Substitutionen fortfahren. — Bei dem $\int \frac{x^m.\,dx}{(1-x^2)^2}$ bemerke ich, dass ich, wenn $m = 3$, $\int \frac{x^3.\,dx}{(1-x^2)^2} = \frac{x^2}{2(1-x^2)} + \frac{1}{2}\, l\,(1-x^2) + C$ der Formel gemäss erhalte. Auf anderm Wege ergiebt sich aber auch

$$\int \frac{x^3.\,dx}{(1-x^2)^2} = \frac{1}{2(1-x^2)} + \frac{1}{2}\, l\,(1-x^2) + C.$$ In der That, wenn

$y = \frac{x^2}{2(1-x^2)}$; so ist $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{(1-x^2)^2}$, und wenn $y = \frac{1}{2(1-x^2)}$, so ist ebenfalls

$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{(1-x^2)^2}$. Es ist nämlich

$$\int \frac{x^{n-1}.\,dx}{(1-x^n)^2} = \frac{1}{n(1-x^n)} + C \text{ und auch } = \frac{x^n}{n(1-x^n)} + C, \text{ auch } = \frac{1+x^n}{2n(1-x^n)} + C, \text{ ebenso}$$

$$= \frac{3+x^n}{4n(1-x^n)} + C, = \frac{1+3x^n}{4n(1-x^n)} + C, = \frac{3+5x^n}{8n(1-x^n)} + C, = \frac{11+13x^n}{24n(1-x^n)} + C,$$ u. s. w.; überhaupt ist

$$\int \frac{x^{n-1}.\,dx}{(1-x^n)^2} = \frac{p+qx^n}{(p+q)n(1-x^n)} + C,$$ wobei p und q beliebig sind.

Die Grössen p und q fallen bei der Differenziation völlig heraus, denn setze ich $p + q = m$, so ist $p = m - q$, und es wird

$$y = \frac{m-q+qx^n}{mn(1-x^n)} + C = \frac{m-q(1-x^n)}{mn(1-x^n)} + C = \frac{m}{mn(1-x^n)} - \frac{q(1-x^n)}{mn(1-x^n)} + C$$

$$= \frac{1}{n(1-x^n)} - \frac{q}{mn} + C = \frac{1}{n(1-x^n)} + C. —$$

Man kann die $\int \frac{x^n.\,dx}{1-x^2}$ und $\int \frac{x^m.\,dx}{(1-x^2)^2}$, ebenso wie $\int \frac{x^{mn-1}.\,dx}{1-x^{2n}}$ auch dazu benutzen, einige trigonometrische Functionen zu integriren, wenn man $x = \sin v$ setzt. — Ich werde aber lieber eine andere Substitution ausführen:

§. 5.

Im $\int x^{mn-1}.\,(1-x^n)^p.\,dx = -\frac{(1-x^n)^{p+1}}{n(m+p)}\left\{x^{(m-1)n} + \left(\frac{m-1}{m+p-1}\right)x^{(m-2)n} + \frac{(m-1)(m-2)}{(m+p-1)(m+p-2)}x^{(m-3)n} + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{(m+p-1)(m+p-2)(m+p-3)}x^{(m-4)n} + \ldots\right\} + C$

substituire ich nunmehr $1 - x^n = \sin^2 y$, dann wird

$$(1-x^n)^p = \sin^{2p} y, \text{ ferner } x^n = 1 - \sin^2 y = \cos^2 y,\ x^{mn} = \cos^{2m} y,\ x = \cos^{\frac{2}{n}} y$$

$$dx = -\frac{2}{n}\cos^{\frac{2}{n}-1} y\,.\,\sin y\,.\,dy,\ x^{mn-1} = (\cos y)^{2m-\frac{2}{n}},$$ und es entsteht

$$\int (\cos y)^{2m-\frac{2}{n}} \,.\, \sin^{2p} y \,.\, \left(-\tfrac{2}{n}\right) \cos^{\frac{2}{n}-1} y \,.\, \sin y \,.\, dy$$

$$= \int \left(-\tfrac{2}{n}\right) \sin^{2p+1} y \,.\, \cos^{2m-1} y \,.\, dy = -\frac{\sin^{2(p+1)} y}{n(m+p)} \left\{ \cos^{\frac{2}{n}(m-1)n} y + \left(\frac{m-1}{m+p-1}\right) \cos^{\frac{2}{n}(m-2)n} y + \frac{(m-1)(m-2)}{(m+p-1)(m+p-2)} \cos^{\frac{2}{n}(m-3)n} y + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{(m+p-1)(m+p-2)(m+p-3)} \cos^{\frac{2}{n}(m-4)n} y + .. \right\} + C$$

oder

$$2 \int \sin^{2p+1} y \,.\, \cos^{2m-1} y \,.\, dy = \frac{\sin^{2(p+1)} y}{m+p} \left\{ \cos^{(m-1)2} y + \left(\frac{m-1}{m+p-1}\right) \cos^{(m-2)2} y + \frac{(m-1)(m-2)}{(m+p-1)(m+p-2)} \cos^{(m-3)2} y + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{(m+p-1)(m+p-2)(m+p-3)} \cos^{(m-4)2} y + \ldots \right\} + C.$$

Jetzt wähle ich $2p + 1 = q$ und $2m - 1 = n$, dann wird

$p = \frac{q-1}{2}$ und $m = \frac{n+1}{2}$. Ferner $2(p+1) = q + 1$.

$m + p = \frac{n+1}{2} + \frac{q-1}{2} = \frac{q+n}{2}$.

$m - 1 = \frac{n-1}{2}$ und $m + p - 1 = \frac{q+n-2}{2}$. Ferner $m - 2 = \frac{n-3}{2}$ und $m + p - 2 = \frac{q+n-4}{2}$

$m - 3 = \frac{n-5}{2}$ und $m + p - 3 = \frac{q+n-6}{2}$. Auch ist $m - 4 = \frac{n-7}{2}$. Es entsteht also

$$2 \int \sin^{q} y \,.\, \cos^{n} y \,.\, dy = \frac{\sin^{q+1} y}{\frac{q+n}{2}} \left\{ \cos^{n-1} y + \frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\left(\frac{q+n-2}{2}\right)} \cos^{n-3} y + \frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-3}{2}\right)}{\left(\frac{q+n-2}{2}\right)\left(\frac{q+n-4}{2}\right)} \cos^{n-5} y + \frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-3}{2}\right)\left(\frac{n-5}{2}\right)}{\left(\frac{q+n-2}{2}\right)\left(\frac{q+n-4}{2}\right)\left(\frac{q+n-6}{2}\right)} \cos^{n-7} y + \ldots \right\} + C$$

oder

$$\int \sin^{q} y \,.\, \cos^{n} y \,.\, dy = \frac{\sin^{q+1} y}{q+n} \left\{ \cos^{n-1} y + \left(\frac{n-1}{q+n-2}\right) \cos^{n-3} y + \frac{(n-1)(n-3)}{(q+n-2)(q+n-4)} \cos^{n-5} y + \frac{(n-1)(n-3)(n-5)}{(q+n-2)(q+n-4)(q+n-6)} \cos^{n-7} y + \ldots \right\} + C$$

oder wenn ich $q = m$ und $y = v$ wähle

$$\underline{\int \sin^{m} v \,.\, \cos^{n} v \,.\, dv} = \left(\frac{\sin^{m+1} v}{m+n}\right) \left\{ \cos^{n-1} v + \left(\frac{n-1}{m+n-2}\right) \cos^{n-3} v + \frac{(n-1)(n-3)}{(m+n-2)(m+n-4)} \cos^{n-5} v + \frac{(n-1)(n-3)(n-5)}{(m+n-2)(m+n-4)(m+n-6)} \cos^{n-7} v + \ldots \right\} + C$$

welche Reihe für <u>n ungerade</u> sehr brauchbar erscheint. (cf. § 12, No. 5.)

Es sei $n = 1$, so ist $\int \sin^{m} v \,.\, \cos v \,.\, dv = \frac{\sin^{m+1} v}{m+1} + C$

Wenn $n = 3$, so ist $\int \sin^{m} v \,.\, \cos^{3} v \,.\, dv = \frac{\sin^{m+1} v}{m+3} \left\{ \cos^{2} v + \frac{2}{m+1} \right\} + C$

Wenn $n = 5$, so ist $\int \sin^{m} v \,.\, \cos^{5} v \,.\, dv = \frac{\sin^{m+1} v}{m+5} \left\{ \cos^{4} v + \left(\frac{4}{m+3}\right) \cos^{2} v + \frac{8}{(m+3)(m+1)} \right\} + C$

Wenn $n = 7$, so ist $\int \sin^{m} v \,.\, \cos^{7} v \,.\, dv = \frac{\sin^{m+1} v}{m+7} \left\{ \cos^{6} v + \left(\frac{6}{m+5}\right) \cos^{4} v + \frac{6 \,.\, 4}{(m+3)(m+3)} \cos^{2} v + \frac{6 \,.\, 4 \,.\, 2}{(m+5)(m+3)(m+1)} \right\} + C$

Wenn $n = 9$, so ist $\int \sin^{m} v \,.\, \cos^{9} v \,.\, dv$

$$= \frac{\sin^{m+1} v}{m+9} \left\{ \cos^{8} v + \left(\frac{8}{m+7}\right) \cos^{6} v + \frac{8 \,.\, 6}{(m+7)(m+5)} \cos^{4} v + \frac{8 \,.\, 6 \,.\, 4}{(m+7)(m+5)(m+3)} \cos^{2} v + \frac{8 \,.\, 6 \,.\, 4 \,.\, 2}{(m+7)(m+3)(m+3)(m+1)} \right\} + C \text{ u. s. w.}$$

Wenn $m = 0$ ist, so erhalte ich $\int \cos^{n} v \,.\, dv$, wie ich es schon früher gefunden habe.

Wenn $m = 1$, so ist

$$\int \sin x \,.\, \cos^{n} x \,.\, dx = \left(\frac{\sin^{2} x}{n+1}\right) \left\{ \cos^{n-1} x + \left(\frac{n-1}{n-1}\right) \cos^{n-3} x + \frac{(n-1)(n-3)}{(n-1)(n-3)} \cos^{n-5} x + \frac{(n-1)(n-3)(n-5)}{(n-1)(n-3)(n-5)} \cos^{n-7} x + \ldots \right\} + C$$

$$= \left(\frac{\sin^{2} x}{n+1}\right) \left\{ \cos^{n-1} x + \cos^{n-3} x + \cos^{n-5} x + \cos^{n-7} x + \ldots \right\} + C.$$

Ich kenne dieses Integral aber bereits

$\int \sin x \,.\, \cos^{n} x \,.\, dx = -\left(\frac{1}{n+1}\right) \cos^{n+1} x + C.$ Danach müsste also sein

$$-\left(\frac{1}{n+1}\right) \cos^{n+1} x = \left(\frac{\sin^{2} x}{n+1}\right) \left\{\cos^{n-1} x + \cos^{n-3} x + \cos^{n-5} x + \cos^{n-7} x + \ldots\right\} \text{ oder}$$

$$-\cos^{n+1} x = (1 - \cos^{2} x)\,(\cos^{n-1} x + \cos^{n-3} x + \cos^{n-5} x + \cos^{n-7} x + \ldots) \text{ folglich}$$

$$-\cos^{n+1} x = \cos^{n-1} x + \cos^{n-3} x + \cos^{n-5} x + \cos^{n-7} x + \ldots$$

$$-\cos^{n+1} x - \cos^{n-1} x - \cos^{n-3} x - \cos^{n-5} x - \cos^{n-7} x - \ldots$$

Die Identität findet also statt.

Wenn $m = 2$, so entsteht

$$\int \sin^{2} x \,.\, \cos^{n} x \,.\, dx = \left(\frac{\sin^{3} x}{n+2}\right) \left\{\cos^{n-1} x + \left(\frac{n-1}{n}\right) \cos^{n-3} x + \frac{(n-1)(n-3)}{n(n-2)} \cos^{n-5} x + \frac{(n-1)(n-3)(n-5)}{n(n-2)(n-4)} \cos^{n-7} x + \ldots\right\} + C$$

Wenn $m = 3$, so ist

$$\int \sin^{3} x \,.\, \cos^{n} x \,.\, dx = \left(\frac{\sin^{4} x}{n+3}\right) \left\{\cos^{n-1} x + \left(\frac{n-1}{n+1}\right) \cos^{n-3} x + \frac{(n-1)(n-3)}{(n+1)(n-1)} \cos^{n-5} x + \frac{(n-1)(n-3)(n-5)}{(n+1)(n-1)(n-3)} \cos^{n-7} x + \frac{(n-1)(n-3)(n-5)(n-7)}{(n+1)(n-1)(n-3)(n-5)} \cos^{n-9} x + \ldots\right\} + C$$

oder

$$\int \sin^{3} x \,.\, \cos^{n} x \,.\, dx = \frac{\sin^{4} x}{(n+1)(n+3)} \left\{(n+1) \cos^{n-1} x + (n-1) \cos^{n-3} x + (n-3) \cos^{n-5} x + (n-5) \cos^{n-7} x + \ldots\right\} + C.$$

Und so kann man mit diesen Substitutionen fortfahren. —

Ich schreite nunmehr zur Integration einer andern trigonometrischen Function.

Zweiter Abschnitt.

§. 6.

Ich betrachte nämlich folgende Function

$y = x^n . \cos x$, deren Differentialquotient

$\frac{dy}{dx} = - x^n . \sin x + \cos x . n x^{n-1}$. Es ist also

$y = - \int x^n . \sin x . dx + n \int x^{n-1} . \cos x . dx$ und

$y = x^n . \cos x$, daher

I. $n \int x^{n-1} . \cos x . dx = x^n . \cos x + \int x^n . \sin x . dx$

Jetzt wende ich auf $\int x^n . \sin x . dx$ die theilweise Integration an.

Es sei $u = x^n . \sin x$ und $v = x$, dann wird

$\frac{du}{dx} = x^n . \cos x + \sin x . n x^{n-1}$ oder

$du = x^n . \cos x . dx + n x^{n-1} . \sin x . dx$, folglich

$v . du = x^{n+1} . \cos x . dx + n x^n . \sin x . dx$ und

$\int v . du = \int x^{n+1} . \cos x . dx + n \int x^n . \sin x . dx$ und da $\int u . dv = uv - \int v\, du$.

so entsteht $\int x^n . \sin x . dx = x^{n+1} . \sin x - \int x^{n+1} . \cos x . dx - n \int x^n . \sin x . dx$

oder $(n+1) \int x^n . \sin x . dx = x^{n+1} . \sin x - \int x^{n+1} . \cos x . dx$, mithin ist

$$\int x^n . \sin x . dx = \frac{x^{n+1} . \sin x}{n+1} - \left(\frac{1}{n+1}\right) \int x^{n+1} . \cos x . dx$$

Diesen Werth setze ich in die Gleichung I. und erhalte

$n \int x^{n-1} . \cos x . dx = x^n . \cos x + \frac{x^{n+1} . \sin x}{n+1} - \left(\frac{1}{n+1}\right) \int x^{n+1} . \cos x . dx$ oder

$\left(\frac{1}{n+1}\right) \int x^{n+1} . \cos x . dx = \frac{(x^{n+1}) . \sin x}{n+1} + x^n . \cos x - n \int x^{n-1} . \cos x . dx$. Daher ist

1) $\underline{\int x^{n+1} . \cos x . dx = x^{n+1} . \sin x + (n+1) x^n . \cos x - n (n+1) \int x^{n-1} . \cos x . dx}$

Ist in dieser Formel $n = o$, so ist

1) $\int x \cos x . dx = x \sin x + \cos x + C.$

Es sei nun in der Gleichung 1 $n = 1$, dann ist

$$\int x^2 . \cos x . dx = x^2 . \sin x + 2x . \cos x - 2\int \cos x . dx \text{ und weil } \int \cos x . dx = \sin x + C, \text{ so ist}$$

2) $$\int x^2 . \cos x . dx = x^2 . \sin x + 2x . \cos x - 2 \sin x + C$$

Wenn $n = 2$, so entsteht

$$\int x^3 . \cos x . dx = x^3 . \sin x + 3x^2 . \cos x - 2 . 3\int x \cos x . dx$$

und weil $\int x \cos x . dx = x \sin x + \cos x + C$, so ist auch

3) $$\int x^3 . \cos x . dx = x^3 . \sin x + 3x^2 . \cos x - 6x \sin x - 6 \cos x + C$$

Wenn $n = 3$, so entsteht

4) $$\begin{aligned}\int x^4 . \cos x . dx &= x^4 . \sin x + 4x^3 . \cos x - 3 . 4\int x^2 . \cos x . dx \\ &= x^4 . \sin x + 4x^3 . \cos x - 12 x^2 . \sin x - 24 x . \cos x + 24 \sin x + C\end{aligned}$$

Wenn noch $n = 4$, so entsteht

5) $$\begin{aligned}\int x^5 . \cos x . dx &= x^5 . \sin x + 5x^4 . \cos x - 4 . 5\int x^3 . \cos x . dx \\ &= x^5 . \sin x + 5x^4 . \cos x - 20x^3 . \sin x - 60x^2 . \cos x + 120x \sin x + 120 \cos x + C.\end{aligned}$$

Ich werde die bisher gefundenen Integrale umschreiben und erhalte alsdann:

$$\int x \cos x . dx = x . \sin x + \cos x + C$$

$$\int x^2 . \cos x . dx = (x^2-2)\sin x + 2x \cos x + C$$

$$\int x^3 . \cos x . dx = (x^3-6x)\sin x + (3x^2-6)\cos x + C$$

$$\int x^4 . \cos x . dx = (x^4-12x^2 + 24)\sin x + (4x^3-24x)\cos x + C$$

$$\int x^5 . \cos x . dx = (x^5-20x^3 + 120x)\sin x + (5x^4-60x^2 + 120) \cos x + C \text{ u. s. w.}$$

Hierbei mache ich die Bemerkung, dass die Potenzen von x, als Factoren von $\sin x$, mit demselben Exponenten beginnen, mit welchem die Potenz von x unter dem Integralzeichen behaftet ist, sowie dass die Exponenten stets um 2 fallen. Andrerseits bemerke ich, dass der Coefficient von $\cos x$ (auf der rechten Seite der Gleichungen) jedesmal der erste Differentialquotient des Coefficienten von $\sin x$ ist. Auf Grund dieser Bemerkungen werde ich nun mittelst der Methode der unbestimmten Coefficienten die Verallgemeinerung, wie folgt, vornehmen:

Es sei

$$\begin{aligned}\int x^n . \cos x . dx = &\left(x^n + ax^{n-2} + bx^{n-4} + cx^{n-6} + fx^{n-8} + \ldots\right)\sin x \\ &+ \left\{nx^{n-1} + a(n-2)x^{n-3} + b(n-4)x^{n-5} + c(n-6)x^{n-7} + f(n-8)x^{n-9} + \ldots\right\}\cos x + C\end{aligned}$$

dann ergiebt die Differenziation dieser Gleichung

$$\begin{aligned}x^n \cos x = &\left(x^n + ax^{n-2} + bx^{n-4} + cx^{n-6} + fx^{n-8} + \ldots\right)\cos x \\ &+ \sin x \left\{nx^{n-1} + a(n-2)x^{n-3} + b(n-4)x^{n-5} + c(n-6)x^{n-7} + f(n-8)x^{n-9} + \ldots\right\} \\ &- \sin x \left\{nx^{n-1} + a(n-2)x^{n-3} + b(n-4)x^{n-5} + c(n-6)x^{n-7} + f(n-8)x^{n-9} + \ldots\right\} \\ &+ \cos x \left\{n(n-1)x^{n-2} + a(n-2)(n-3)x^{n-4} + b(n-4)(n-5)x^{n-6} + c(n-6)(n-7)x^{n-8} + f(n-8)(n-9)x^{n-10} + \ldots\right\}\end{aligned}$$

Die beiden mittleren Summanden heben sich hinweg; die übrig bleibende Gleichung durch $\cos x$ dividirt ergiebt

$$x^n = \left|\begin{array}{l} \quad\quad n(n-1)x^{n-2} + a(n-2)(n-3)x^{n-4} + b(n-4)(n-5)x^{n-6} + c(n-6)(n-7)x^{n-8} + \ldots \\ + x^n \quad + ax^{n-2} \quad\quad + bx^{n-4} \quad\quad + cx^{n-6} \quad\quad + fx^{n-8} + \ldots \end{array}\right.$$

Daher ist

1) $a + n(n-1) = o$ oder $a = -n(n-1)$

2) $b = -a(n-2)(n-3)$ oder $b = +n(n-1)(n-2)(n-3)$

3) $c = -b(n-4)(n-5)$ oder $c = -n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$

4) $f = -c(n-6)(n-7)$ oder $f = +n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)$ u. s. w.

Es entsteht also folgendes Integral:

$$\underline{\int x^n . \cos x . dx} = \{x^n - n(n-1)x^{n-2} + n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4} - n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)x^{n-6}$$
$$+ n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)x^{n-8} - \ldots\} \sin x$$
$$+ \{nx^{n-1} - n(n-1)(n-2)x^{n-3} + n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)x^{n-5}$$
$$- n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)x^{n-7} + \ldots\} \cos x + C.$$

Im $\int x^n . \cos x . dx$ sei behufs theilweiser Integration

$u = x^n . \cos x$ und $v = x$, dann ist

$$\frac{du}{dx} = -x^n . \sin x + \cos x . nx^{n-1} \text{ und } v . du = -x^{n+1} . \sin x . dx + nx^n . \cos x . dx$$

daher

$$\int x^n . \cos x . dx = x^{n+1} . \cos x + \int x^{n+1} . \sin x . dx - n\int x^n . \cos x . dx \text{ oder}$$
$$\int x^{n+1} . \sin x . dx = (n+1)\int x^n . \cos x . dx - x^{n+1} . \cos x, \text{ folglich}$$
$$\int x^{n+1} . \sin x . dx = (n+1)\{x^n - n(n-1)x^{n-2} + n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4} - \ldots\} \sin x$$
$$+ (n+1)\{nx^{n-1} - n(n-1)(n-2)x^{n-3} + n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)x^{n-5} - \ldots\} \cos x$$
$$- x^{n+1} . \cos x + C; \text{ oder auch}$$
$$\underline{\int x^n . \sin x . dx} = \{nx^{n-1} - n(n-1)(n-2)x^{n-3} + n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)x^{n-5} - \ldots\} \sin x$$
$$- \{x^n - n(n-1)x^{n-2} + n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4} - n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)x^{n-6} + \ldots\} \cos x + C$$

Das $\int x^n . \cos x . dx$ kann ich auch anders schreiben. Wenn $\sin x = v$, so ist $\cos x . dx = dv$, ferner $x = \text{Arc} \sin v$ und $\cos x = \sqrt{1-v^2}$, dann ist

$$\underline{\int (\text{Arc} \sin v)^n . dv} = \{(\text{Arc} \sin v)^n - n(n-1)(\text{Arc} \sin v)^{n-2} + n(n-1)(n-2)(n-3)(\text{Arc} \sin v)^{n-4} - \ldots\} . v$$
$$+ \{n(\text{Arc} \sin v)^{n-1} - n(n-1)(n-2)(\text{Arc} \sin v)^{n-3} + n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(\text{Arc} \sin v)^{n-5} - \ldots\} \sqrt{1-v^2} + C.$$

§. 7.

Ich betrachte die Function

$y = x^n . \cos^2 x$, deren Differentialquotient

$\frac{dy}{dx} = -x^n . 2\cos x . \sin x + \cos^2 x . \left(nx^{n-1}\right)$. Es ist also

$y = -2\int x^n . \sin x . \cos x . dx + n\int x^{n-1} . \cos^2 x . dx = x^n . \cos^2 x$, folglich auch

$$\text{I.}\quad n\int x^{n-1} . \cos^2 x . dx = x^n . \cos^2 x + 2\int x^n . \sin x . \cos x . dx$$

das letztere $\int x^n . \sin x . \cos x . dx$ werde ich theilweise integriren.

Es sei $u = x^n . \sin x . \cos x$ und $v = x$, dann ist

$\frac{du}{dx} = -x^n . \sin^2 x + x^n . \cos^2 x + \sin x . \cos x . \left(nx^{n-1}\right)$, mithin

$v . du = \left(-x^{n+1} . \sin^2 x + x^{n+1} . \cos^2 x + nx^n . \sin x . \cos x\right) dx$. Es entsteht also

$\int x^n . \sin x . \cos x . dx = x^{n+1} . \sin x . \cos x + \int x^{n+1} . \sin^2 x . dx - \int x^{n+1} . \cos^2 x . dx - n\int x^n . \sin x . \cos x . dx$ oder

$(n+1)\int x^n . \sin x . \cos x . dx = x^{n+1} . \sin x . \cos x + \int x^{n+1} . \sin^2 x . dx - \int x^{n+1} . \cos^2 x . dx$, also

$$\int x^n . \sin x . \cos x . dx = \frac{x^{n+1} . \sin x . \cos x}{n+1} + \left(\frac{1}{n+1}\right)\int x^{n+1}\left(1-\cos^2 x\right) dx - \left(\frac{1}{n+1}\right)\int x^{n+1} . \cos^2 x . dx$$

Es ist also

$$\int x^n . \sin x . \cos x . dx = \frac{x^{n+1} . \sin x . \cos x}{n+1} + \frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)} - \left(\frac{1}{n+1}\right)\int x^{n+1} . \cos^2 x . dx - \left(\frac{1}{n+1}\right)\int x^{n+1} . \cos^2 x . dx$$

oder endlich

$$\int x^n . \sin x . \cos x . dx = \frac{x^{n+1} . \sin x . \cos x}{n+1} + \frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)} - \left(\frac{2}{n+1}\right)\int x^{n+1} . \cos^2 x . dx$$

Diesen Werth setze ich in die mit I. bezeichnete Gleichung ein, und erhalte

$$\left(\frac{n}{2}\right)\int x^{n-1} . \cos^2 x . dx = \frac{x^n . \cos^2 x}{2} + \frac{x^{n+1} . \sin x . \cos x}{n+1} + \frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)} - \left(\frac{2}{n+1}\right)\int x^{n+1} . \cos^2 x . dx$$

Daher entsteht

$$\int x^{n+1} . \cos^2 x . dx = \frac{(n+1)x^n . \cos^2 x}{4} + \frac{x^{n+1} . \sin x . \cos x}{2} + \frac{x^{n+2}}{2(n+2)} - \frac{n(n+1)}{4}\int x^{n-1} . \cos^2 x . dx$$

Bevor nun für n einzelne Werthe substituirt werden, möge erst $\int x\cos^2 x . dx$ auf anderm Wege gefunden werden.

Wenn $y = x\sin x . \cos x$, so wird $\frac{dy}{dx} = -x\sin^2 x + x\cos^2 x + \sin x\cos x$

oder $\frac{dy}{dx} = -x\left(1-\cos^2 x\right) + x\cos^2 x + \sin x\cos x$

$= -x + 2x\cos^2 x + \sin x\cos x$. Es ist also

$y = -\frac{x^2}{2} + 2\int x\cos^2 x . dx + \int \sin x\cos x . dx = x\sin x\cos x$ daher

$$2\int x\cos^2 x \, . \, dx = \frac{x^2}{2} + x\sin x\cos x - \frac{\sin^2 x}{2} + C, \text{ oder da } \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$1) \int x\cos^2 x \, . \, dx = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2}\sin x \, . \, \cos x + \frac{1}{4}\cos^2 x + C.$$

Ist nun in obiger Formel $n = 1$, so entsteht

$$\int x^2\cos^2 x \, . \, dx = \frac{x^3}{6} + \frac{x^2 . \sin x . \cos x}{2} + \frac{x\cos^2 x}{2} - \frac{1}{2}\int \cos^2 x \, . \, dx$$

$$= \frac{x^3}{6} + \frac{x^2 . \sin x . \cos x}{2} + \frac{x\cos^2 x}{2} - \frac{1}{4}\sin x \, . \, \cos x - \frac{1}{4}x + C, \text{ also}$$

$$2) \int x^2 . \cos^2 x \, . \, dx = \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x}{4}\right) + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}\right)\sin x \, . \, \cos x + \frac{x\cos^2 x}{2} + C$$

Wenn $n = 2$, so entsteht

$$\int x^3 . \cos^2 x \, . \, dx = \frac{x^4}{8} + \frac{x^3 . \sin x . \cos x}{2} + \frac{3x^2 . \cos^2 x}{4} - \frac{3}{2}\int x\cos^2 x \, . \, dx$$

$$= \frac{x^4}{8} + \frac{x^3 . \sin x . \cos x}{2} + \frac{3x^2 . \cos^2 x}{4} - \frac{3}{8}x^2 - \frac{3x . \sin x . \cos x}{4} - \frac{3}{8}\cos^2 x + C \quad \text{oder}$$

$$3) \int x^3 . \cos^2 x \, . \, dx = \left(\frac{x^4}{8} - \frac{3}{8}x^2\right) + \left(\frac{x^3}{2} - \frac{3}{4}x\right)\sin x \, . \, \cos x + \left(\frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{8}\right)\cos^2 x + C.$$

Ich bemerke, dass diese Integrale aus drei Theilen bestehen. Der erste Theil enthält nur Potenzen von x, welche mit einem um 1 höhern Exponenten beginnen, als die Variable x unter dem Integralzeichen aufweist; der zweite Theil beginnt mit demselben Exponenten, mit dem auch das x unter dem Integralzeichen behaftet ist und ist mit dem Product $\sin x \, . \, \cos x$ multiplicirt; die Potenzen des dritten Theils beginnen mit einem um 1 niedrigeren Exponenten als das x unter dem Integralzeichen, und sind mit $\cos^2 x$ multiplicirt. Ebenso bemerke ich noch, dass die Potenzen von x aller drei Theile stets um 2 Grad fallen. Es sei daher

$$\int x^n . \cos^2 x \, . \, dx = Ax^{n+1} + Bx^{n-1} + Cx^{n-3} + Dx^{n-5} + \ldots .$$
$$+ \left(Ex^n + Fx^{n-2} + Gx^{n-4} + Hx^{n-6} + \ldots .\right)\sin x\cos x + \left(Jx^{n-1} + Kx^{n-3} + Lx^{n-5} + Mx^{n-7} + \ldots\right)\cos^2 x + C$$

dann entsteht durch Differenziation folgende Gleichung

$$x^n . \cos^2 x = A(n+1)x^n + B(n-1)x^{n-2} + C(n-3)x^{n-4} + D(n-5)x^{n-6} + \ldots .$$
$$- \left(Ex^n + Fx^{n-2} + Gx^{n-4} + Hx^{n-6} + \ldots\right)\sin^2 x + \left(Ex^n + Fx^{n-2} + Gx^{n-4} + Hx^{n-6} + \ldots\right)\cos^2 x$$
$$+ \sin x \, . \, \cos x \left\{Enx^{n-1} + F(n-2)x^{n-3} + G(n-4)x^{n-5} + H(n-6)x^{n-7} + \ldots .\right\}$$
$$- \left(Jx^{n-1} + Kx^{n-3} + Lx^{n-5} + Mx^{n-7} + \ldots .\right) 2\cos x \, . \, \sin x$$
$$+ \cos^2 x \left\{J(n-1)x^{n-2} + K(n-3)x^{n-4} + L(n-5)x^{n-6} + M(n-7)x^{n-8} + \ldots .\right\}$$

oder mit Berücksichtigung, dass $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, geordnet

$$x^n.\cos^2 x = \left\{\begin{array}{l} A(n+1)x^n + B(n-1)x^{n-2} + C(n-3)x^{n-4} + D(n-5)x^{n-6} + \dots\dots \\ -Ex^n \quad - Fx^{n-2} \quad - Gx^{n-4} \quad - Hx^{n-6} - \dots\dots \end{array}\right\}$$

$$+ \left\{\begin{array}{l} Ex^n + Fx^{n-2} \quad + Gx^{n-4} \quad + Hx^{n-6} + \dots\dots \\ + Ex^n + Fx^{n-2} \quad + Gx^{n-4} \quad + Hx^{n-6} + \dots\dots \\ + I(n-1)x^{n-2} + K(n-3)x^{n-4} + L(n-5)x^{n-6} + \dots\dots \end{array}\right\} \cos^2 x$$

$$+ \left\{\begin{array}{l} Enx^{n-1} + F(n-2)x^{n-3} + G(n-4)x^{n-5} + H(n-6)x^{n-7} + \dots\dots \\ -2Ix^{n-1} \quad -2Kx^{n-3} \quad -2Lx^{n-5} \quad -2Mx^{n-7} - \dots\dots \end{array}\right\} \sin x \, \cos x$$

Daraus ergeben sich folgende Bestimmungen:

1) $2Ex^n.\cos^2 x = x^n.\cos^2 x$ oder $E = \frac{1}{2}$

2) $A(n+1) - E = 0$ oder $A = \frac{E}{n+1}$ oder $A = \frac{1}{2(n+1)}$

3) $En - 2I = 0$ oder $I = E.\left(\frac{n}{2}\right)$ daher $I = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{n}{2}\right)$

4) $2F + I(n-1) = 0$ oder $F = -I\left(\frac{n-1}{2}\right)$ daher $F = -\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}\right)$

5) $F(n-2) - 2K = 0$ oder $K = F\left(\frac{n-2}{2}\right)$ daher $K = -\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{2}\right)$

6) $B(n-1) - F = 0$ oder $B = \frac{F}{n-1}$ daher $B = -\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{n}{2}\right)$

7) $2G + K(n-3) = 0$ oder $G = -K\left(\frac{n-3}{2}\right)$ daher $G = +\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{2}\right)\left(\frac{n-3}{2}\right)$

8) $G(n-4) - 2L = 0$ oder $L = G\left(\frac{n-4}{2}\right)$ daher $L = +\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{2}\right)\left(\frac{n-3}{2}\right)\left(\frac{n-4}{2}\right)$

9) $C(n-3) - G = 0$ oder $C = \frac{G}{n-3}$ daher $C = +\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{2}\right)$

10) $2H + L(n-5) = 0$ oder $H = -L\left(\frac{n-5}{2}\right)$ daher $H = -\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{2}\right)\left(\frac{n-3}{2}\right)\left(\frac{n-4}{2}\right)\left(\frac{n-5}{2}\right)$

11) $D(n-5) - H = 0$ oder $D = \frac{H}{n-5}$ daher $D = -\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{2}\right)\left(\frac{n-3}{2}\right)\left(\frac{n-4}{2}\right)$

12) $H(n-6) - 2M = 0$ oder $M = H\left(\frac{n-6}{2}\right)$ daher $M = -\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{2}\right)\left(\frac{n-3}{2}\right)\left(\frac{n-4}{2}\right)\left(\frac{n-5}{2}\right)\left(\frac{n-6}{2}\right)$

Es entsteht daher folgendes Integral:

$$\int x^n.\cos^2 x\,.\,dx = \frac{1}{2(n+1)}x^{n+1} - \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{n}{2}\right)x^{n-1} + \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{2}\right)x^{n-3} - \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{2}\right)\left(\frac{n-3}{2}\right)\left(\frac{n-4}{2}\right)x^{n-5} + \dots$$

$$+ \left\{\frac{1}{2}x^n - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}\right)x^{n-2} + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{2}\right)\left(\frac{n-3}{2}\right)x^{n-4} - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{2}\right)\left(\frac{n-3}{2}\right)\left(\frac{n-4}{2}\right)\left(\frac{n-5}{2}\right)x^{n-6} + \dots\right\} \sin x \cos x$$

$$+ \left\{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{n}{2}\right)x^{n-1} - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{2}\right)x^{n-3} + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{2}\right)\left(\frac{n-3}{2}\right)\left(\frac{n-4}{2}\right)x^{n-5} - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{2}\right)\left(\frac{n-3}{2}\right)\left(\frac{n-4}{2}\right)\left(\frac{n-5}{2}\right)\left(\frac{n-6}{2}\right)x^{n-7} + \dots\right\}.\cos^2 x + C.$$

oder

$$\underline{\int x^n.\cos^2 x\,.\,dx} = \frac{1}{2(n+1)}x^{n+1} - \frac{n}{8}\left\{x^{n-1} - \left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{2}\right)x^{n-3} + \left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{2}\right)\left(\frac{n-3}{2}\right)\left(\frac{n-4}{2}\right)x^{n-5}\right.$$

$$\left. - \left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{2}\right)\left(\frac{n-3}{2}\right)\left(\frac{n-4}{2}\right)\left(\frac{n-5}{2}\right)\left(\frac{n-6}{2}\right)x^{n-7} + \dots\dots\right\} + \frac{1}{2}\left\{x^n - \left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}\right)x^{n-2} + \left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{2}\right)\left(\frac{n-3}{2}\right)x^{n-4}\right.$$

$$\left. - \left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{2}\right)\left(\frac{n-3}{2}\right)\left(\frac{n-4}{2}\right)\left(\frac{n-5}{2}\right)x^{n-6} + \dots\dots\right\} \sin x\,.\,\cos x + \frac{n}{4}\left\{x^{n-1} - \left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{2}\right)x^{n-3}\right.$$

$$\left. + \left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{2}\right)\left(\frac{n-3}{2}\right)\left(\frac{n-4}{2}\right)x^{n-5} - \left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{2}\right)\left(\frac{n-3}{2}\right)\left(\frac{n-4}{2}\right)\left(\frac{n-5}{2}\right)\left(\frac{n-6}{2}\right)x^{n-7} + \dots\dots\right\} \cos^2 x + C.$$

Es sei in diesem Integral behufs theilweiser Integration

$u = x^n.\cos^2 x$ und $v = x$, dann wird

$\frac{du}{dx} = -x^n.\,2\cos x\,.\,\sin x + \cos^2 x\,.\left(nx^{n-1}\right)$, daher

$$du = -2x^n . \sin x . \cos x . dx + nx^{n-1} . \cos^2 x . dx$$ und

$$v . du = -2x^{n+1} . \sin x . \cos x . dx + nx^n . \cos^2 x . dx.$$ Nun ist $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

daher wird

$$\int x^n . \cos^2 x . dx = x^{n+1} . \cos^2 x + 2\int x^{n+1} . \sin x . \cos x . dx - n\int x^n . \cos^2 x . dx,$$ folglich

$$\int x^{n+1} . \sin x . \cos x . dx = \left(\frac{n+1}{2}\right)\int x^n . \cos^2 x . dx - \frac{x^{n+1} . \cos^2 x}{2}.$$ Es ist also

$$\int x^{n+1} . \sin x . \cos x . dx = \frac{x^{n+1}}{4} - \frac{n(n+1)}{16}\left\{x^{n-1} - \left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{2}\right)x^{n-3} + \left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{2}\right)\left(\frac{n-3}{2}\right)\left(\frac{n-4}{2}\right)x^{n-5} - \ldots\ldots\right\}$$
$$+ \left(\frac{n+1}{4}\right)\left\{x^n - \left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}\right)x^{n-2} + \left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{2}\right)\left(\frac{n-3}{2}\right)x^{n-4} - \left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{2}\right)\left(\frac{n-3}{2}\right)\left(\frac{n-4}{2}\right)\left(\frac{n-5}{2}\right)x^{n-6} + \ldots\ldots\right\}\sin x . \cos x$$
$$+ \frac{n(n+1)}{8}\left\{x^{n-1} - \left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{2}\right)x^{n-3} + \left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{2}\right)\left(\frac{n-3}{2}\right)\left(\frac{n-4}{2}\right)x^{n-5} - \left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{2}\right)\left(\frac{n-3}{2}\right)\left(\frac{n-4}{2}\right)\left(\frac{n-5}{2}\right)\left(\frac{n-6}{2}\right)x^{n-7} + \ldots\right\}\cos^2 x - \frac{x^{n+1} . \cos^2 x}{2} + C.$$

oder auch

$$\underline{\int x^n . \sin x . \cos x . dx} = \frac{x^n}{4} - \frac{n(n-1)}{16}\left\{x^{n-2} - \left(\frac{n-2}{2}\right)\left(\frac{n-3}{2}\right)x^{n-4} + \left(\frac{n-2}{2}\right)\left(\frac{n-3}{2}\right)\left(\frac{n-4}{2}\right)\left(\frac{n-5}{2}\right)x^{n-6} - \left(\frac{n-2}{2}\right)\left(\frac{n-3}{2}\right)\left(\frac{n-4}{2}\right)\left(\frac{n-5}{2}\right)\left(\frac{n-6}{2}\right)\left(\frac{n-7}{2}\right)x^{n-8} + .\right\}$$
$$+ \frac{n}{4}\left\{x^{n-1} - \left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{2}\right)x^{n-3} + \left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{2}\right)\left(\frac{n-3}{2}\right)\left(\frac{n-4}{2}\right)x^{n-5} - \left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{2}\right)\left(\frac{n-3}{2}\right)\left(\frac{n-4}{2}\right)\left(\frac{n-5}{2}\right)\left(\frac{n-6}{2}\right)x^{n-7} + \ldots\ldots\right\}\sin x . \cos x$$
$$+ \frac{n(n-1)}{8}\left\{x^{n-2} - \left(\frac{n-2}{2}\right)\left(\frac{n-3}{2}\right)x^{n-4} + \left(\frac{n-2}{2}\right)\left(\frac{n-3}{2}\right)\left(\frac{n-4}{2}\right)\left(\frac{n-5}{2}\right)x^{n-6} - \left(\frac{n-2}{2}\right)\left(\frac{n-3}{2}\right)\left(\frac{n-4}{2}\right)\left(\frac{n-5}{2}\right)\left(\frac{n-6}{2}\right)\left(\frac{n-7}{2}\right)x^{n-8}\ldots\right\}\cos^2 x - \frac{x^n . \cos^2 x}{2} + C.$$

Es sei z. B. $n = 8$, so muss sein $y =$

$$\int x^8 . \sin x . \cos x . dx = \frac{x^8}{4} - \frac{8 . 7}{16}\left\{x^6 - \left(\frac{6}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)x^4 + \left(\frac{6}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{4}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)x^2 - \left(\frac{6}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{4}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{2}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\right\}$$
$$+ \frac{8}{4}\left\{x^7 - \left(\frac{7}{2}\right)\left(\frac{6}{2}\right)x^5 + \left(\frac{7}{2}\right)\left(\frac{6}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{4}{2}\right)x^3 - \left(\frac{7}{2}\right)\left(\frac{6}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{4}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{2}{2}\right)x\right\}\sin x . \cos x + \frac{8 . 7}{8}\left\{x^6 - \left(\frac{6}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)x^4\right.$$
$$\left. + \left(\frac{6}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{4}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)x^2 - \left(\frac{6}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{4}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{2}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\right\} - \frac{x^8 . \cos^2 x}{2} + C.$$

oder

$$y = \int x^8 . \sin x . \cos x . dx = \frac{x^8}{4} - \left\{\frac{7}{2}x^6 - \frac{105}{4}x^4 + \frac{315}{4}x^2 - \frac{315}{8}\right\} + \left\{2x^7 - 21x^5 + 105x^3 - \frac{315}{2}x\right\}\sin x . \cos x$$
$$+ \left\{7x^6 - \frac{105}{2}x^4 + \frac{315}{2}x^2 - \frac{315}{4}\right\}\cos^2 x - \frac{x^8 . \cos^2 x}{2} + C.$$

dann müsste aber auch sein

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4} . 8x^7 - \frac{7}{2} . 6x^5 + \frac{105}{4} . 4x^3 - \frac{315}{4} . 2x - \left(2x^7 - 21x^5 + 105x^3 - \frac{315}{2}x\right)\sin^2 x$$
$$+ \left(2x^7 - 21x^5 + 105x^3 - \frac{315}{2}x\right)\cos^2 x + \sin x\cos x\left(2 . 7x^6 - 21 . 5x^4 + 105 . 3x^2 - \frac{315}{2}\right)$$
$$- \left(7x^6 - \frac{105}{2}x^4 + \frac{315}{2}x^2 - \frac{315}{4}\right). 2\cos x\sin x + \cos^2 x\left(7 . 6x^5 - \frac{105}{2} . 4x^3 + \frac{315}{2} . 2x\right)$$
$$+ \frac{1}{2} . x^8 . 2\cos x . \sin x - \frac{1}{2}\cos^2 x . 8x^7$$ oder, da $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$,

$$\frac{dy}{dx} = 2x^7 - 21x^5 + 105x^3 - \frac{315}{2}x + 2x^7\cos^2 x - 21x^5\cos^2 x + 105x^3 . \cos^2 x - \frac{315}{2}x\cos^2 x$$
$$- 2x^7 + 21x^5 - 105x^3 + \frac{315}{2}x + 2x^7\cos^2 x - 21x^5\cos^2 x + 105x^3 . \cos^2 x - \frac{315}{2}x\cos^2 x$$
$$- 4x^7\cos^2 x + 42x^5\cos^2 x - 210x^3\cos^2 x + 315x\cos^2 x$$
$$+ 14x^6\sin x\cos x - 105x^4\sin x\cos x + 315x^2 . \sin x\cos x - \frac{315}{2}\sin x\cos x + x^8\sin x\cos x$$
$$- 14x^6\sin x\cos x + 105x^4\sin x\cos x - 315x^2 . \sin x\cos x + \frac{315}{2}\sin x\cos x$$

Es ist also in der That

$\frac{dy}{dx} = x^{8} . \sin x \cos x$, daher das Integral richtig.

Um nun auch das $\int x^{n} . \sin^{2} x \, dx$ zu finden, erwäge ich, dass

$$\int x^{n} \sin^{2} x \, dx + \int x^{n} . \cos^{2} x \, dx = \int (x^{n} \sin^{2} x + x^{n} \cos^{2} x) \, dx = \int x^{n} (\sin^{2} x + \cos^{2} x) \, dx = \int x^{n} . \, dx$$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \text{ daher } \int x^{n} . \sin^{2} x \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} - \int x^{n} . \cos^{2} x \, dx, \text{ also}$$

$$\underline{\int x^{n} . \sin^{2} x \, . \, dx} = \frac{x^{n+1}}{2(n+1)} + \frac{n}{8} \Big\{ x^{n-1} - \left(\tfrac{n-1}{2}\right)\left(\tfrac{n-2}{2}\right) x^{n-3} + \left(\tfrac{n-1}{2}\right)\left(\tfrac{n-2}{2}\right)\left(\tfrac{n-3}{2}\right)\left(\tfrac{n-4}{2}\right) x^{n-5}$$

$$- \left(\tfrac{n-1}{2}\right)\left(\tfrac{n-2}{2}\right)\left(\tfrac{n-3}{2}\right)\left(\tfrac{n-4}{2}\right)\left(\tfrac{n-5}{2}\right)\left(\tfrac{n-6}{2}\right) x^{n-7} + \ldots\ldots \Big\} - \frac{1}{2} \Big\{ x^{n} - \left(\tfrac{n}{2}\right)\left(\tfrac{n-1}{2}\right) x^{n-2} + \left(\tfrac{n}{2}\right)\left(\tfrac{n-1}{2}\right)\left(\tfrac{n-2}{2}\right)\left(\tfrac{n-3}{2}\right) x^{n-4}$$

$$- \left(\tfrac{n}{2}\right)\left(\tfrac{n-1}{2}\right)\left(\tfrac{n-2}{2}\right)\left(\tfrac{n-3}{2}\right)\left(\tfrac{n-4}{2}\right)\left(\tfrac{n-5}{2}\right) x^{n-6} + \ldots\ldots \Big\} \sin x \cos x - \frac{n}{4} \Big\{ x^{n-1} - \left(\tfrac{n-1}{2}\right)\left(\tfrac{n-2}{2}\right) x^{n-3}$$

$$+ \left(\tfrac{n-1}{2}\right)\left(\tfrac{n-2}{2}\right)\left(\tfrac{n-3}{2}\right)\left(\tfrac{n-4}{2}\right) x^{n-5} - \left(\tfrac{n-1}{2}\right)\left(\tfrac{n-2}{2}\right)\left(\tfrac{n-3}{2}\right)\left(\tfrac{n-4}{2}\right)\left(\tfrac{n-5}{2}\right)\left(\tfrac{n-6}{2}\right) x^{n-7} + \ldots\ldots \Big\} \cos^{2} x + C.$$

§. 8.

Die Function

$y = x^{n} . \cos^{m} x$ hat den Differentialquotienten

$\frac{dy}{dx} = - x^{n} . m \cos^{m-1} x \, . \sin x + \cos^{m} x \, . \, (n x^{n-1})$. Es ist daher

$y = - m \int x^{n} \cos^{m-1} x \, . \sin x \, . \, dx + n \int x^{n-1} \cos^{m} x \, . \, dx = x^{n} . \cos^{m} x$, folglich

I.) $\underline{n \int x^{n-1} . \cos^{m} x \, . \, dx = x^{n} . \cos^{m} x + m \int x^{n} . \cos^{m-1} x \, . \sin x \, . \, dx}$

Letzteres $\int x^{n} . \cos^{m-1} x \, . \sin x \, . \, dx$ zerlege ich durch theilweise Integration.

Es sei $u = x^{n} . \cos^{m-1} x \, . \sin x$ und $v = x$, dann ist

$$\frac{du}{dx} = x^{n} . \cos^{m-1} x \, . \cos x - x^{n} . \sin x \, (m-1) \cos^{m-2} x \, . \sin x + \cos^{m-1} x \, . \sin x \, . \, (n x^{n-1})$$

$$= x^{n} . \cos^{m} x - (m-1) \, x^{n} . \cos^{m-2} x \, . \sin^{2} x + n x^{n-1} . \cos^{m-1} x \, . \sin x$$

$$= x^{n} . \cos^{m} x - (m-1) \, x^{n} . \cos^{m-2} x \, (1 - \cos^{2} x) + n x^{n-1} . \cos^{m-1} x \, . \sin x$$

$$= x^{n} . \cos^{m} x - (m-1) \, x^{n} . \cos^{m-2} x + (m-1) \, x^{n} . \cos^{m} x + n x^{n-1} . \cos^{m-1} x \, . \sin x \text{ folglich}$$

$$du = m x^{n} . \cos^{m} x \, . \, dx - (m-1) \, x^{n} . \cos^{m-2} x \, . \, dx + n x^{n-1} . \cos^{m-1} x \, . \sin x \, . \, dx \text{ und}$$

$$v \, du = m x^{n+1} . \cos^{m} x \, . \, dx - (m-1) \, x^{n+1} . \cos^{m-2} x \, . \, dx + n x^{n} . \cos^{m-1} x \, . \sin x \, . \, dx$$

Es entsteht daher:

$$\int x^{n} . \cos^{m-1} x \, . \sin x \, . \, dx = x^{n+1} . \cos^{m-1} x \, . \sin x - m \int x^{n+1} . \cos^{m} x \, . \, dx + (m-1) \int x^{n+1} . \cos^{m-2} x \, . \, dx - n \int x^{n} \cos^{m-1} x \, . \sin x \, . \, dx$$

oder

$$(n+1) \int x^{n} . \cos^{m-1} x \, . \sin x \, . \, dx = x^{n+1} . \cos^{m-1} x \, . \sin x - m \int x^{n+1} . \cos^{m} x \, . \, dx + (m-1) \int x^{n+1} . \cos^{m-2} x \, . \, dx$$

Daher ist

$$\int x^{n} . \cos^{m-1} x \, . \sin x \, . \, dx = \frac{x^{n+1} . \cos^{m-1} x \, . \sin x}{n+1} - \left(\tfrac{m}{n+1}\right) \int x^{n+1} . \cos^{m} x \, . \, dx + \left(\tfrac{m-1}{n+1}\right) \int x^{n+1} . \cos^{m-2} x \, . \, dx$$

Dieses Integral substituire ich in die mit I. bezeichnete Gleichnng, dann entsteht:

$$\frac{n}{m}\int x^{n-1}.\cos^{m} x\,.\,dx = \frac{x^{n}.\cos^{m} x}{m} + \frac{x^{n+1}.\cos^{m-1} x\,.\,\sin x}{n+1} - \left(\frac{m}{n+1}\right)\int x^{n+1}.\cos^{m} x\,.\,dx + \left(\frac{m-1}{n+1}\right)\int x^{n+1}.\cos^{m-2} x\,.\,dx$$

oder

$$\left(\frac{m}{n+1}\right)\int x^{n+1}.\cos^{m} x\,.\,dx = \frac{x^{n}.\cos^{m} x}{m} + \frac{x^{n+1}.\cos^{m-1} x\,.\,\sin x}{n+1} - \frac{n}{m}\int x^{n-1}.\cos^{m} x\,.\,dx + \left(\frac{m-1}{n+1}\right)\int x^{n+1}.\cos^{m-2} x\,.\,dx$$

oder endlich

$$1)\ \int x^{n+1}.\cos^{m} x\,.\,dx = \frac{(n+1)\,x^{n}.\cos^{m} x}{m^2} + \frac{x^{n+1}.\cos^{m-1} x\,.\,\sin x}{m} - \frac{n\,(n+1)}{m^2}\int x^{n-1}.\cos^{m} x\,.\,dx + \left(\frac{m-1}{m}\right)\int x^{n+1}.\cos^{m-2} x\,.\,dx$$

Es sei nun $m = 3$, dann ist

$$\int x^{n+1}.\cos^{3} x\,.\,dx = \frac{(n+1)\,x^{n}.\cos^{3} x}{9} + \frac{x^{n+1}.\cos^{2} x\,.\,\sin x}{3} - \frac{n\,(n+1)}{9}\int x^{n-1}.\cos^{3} x\,.\,dx + \frac{2}{3}\int x^{n+1}.\cos x\,.\,dx$$

wobei das $\int x^{n+1}.\cos x\,.\,dx$ sehr leicht aus dem $\int x^{n}.\cos x\,.\,dx$ entnommen werden kann. Es ist alsdann

$$\int x^{n+1}.\cos^{3} x\,.\,dx = \frac{(n+1)\,x^{n}.\cos^{3} x}{9} + \frac{x^{n+1}.\cos^{2} x\,.\,\sin x}{3} + \frac{2}{3}\Big\{x^{n+1} - (n+1)\,n x^{n-1} + (n+1)\,n\,(n-1)\,(n-2)\,x^{n-3}$$
$$- (n+1)\,n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,(n-4)\,x^{n-5} + \ldots\Big\}\sin x + \frac{2}{3}\Big\{(n+1)\,x^{n} - (n+1)\,n\,(n-1)\,x^{n-2}$$
$$+ (n+1)\,n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,x^{n-4} - (n+1)\,n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,(n-4)\,(n-5)\,x^{n-6} + \ldots\Big\}\cos x$$
$$- \frac{n\,(n+1)}{9}\int x^{n-1}.\cos^{3} x\,.\,dx$$

Bevor nun dem n bestimmte Werthe gegeben werden, möge erst noch $\int x\cos^{3} x\,.\,dx$ auf anderem Wege gefunden werden. Das Integral ist aber direct schwerlich zu finden, und werde ich deshalb einen ziemlichen Umweg beschreiben müssen. Zunächst leite ich aus dem bereits bekannten $\int \sin^{n} v\,.\,dv$ eine andere Formel ab.

Es sei $u = \sin^{n} v$ dann ist $du = n\sin^{n-1} v\,.\,\cos v\,.\,dv$ und $v\,.\,du = n\,.\,v\,.\,\sin^{n-1} v\,.\,\cos v\,.\,dv$

Weil nun $\int u\,dv = u\,v - \int v\,du$ so ist auch

$\int \sin^{n} v\,.\,dv = v\sin^{n} v - n\int v\,.\,\sin^{n-1} v\,.\,\cos v\,.\,dv$ oder auch

$\int v\,.\,\sin^{n-1} v\,.\,\cos v\,.\,dv = \frac{v\,.\,\sin^{n} v}{n} - \frac{1}{n}\int \sin^{n} v\,.\,dv$, also wenn n ungerade (nach §. 2, No. 2)

$$= \frac{v\,.\,\sin^{n} v}{n} + \frac{1}{n^2}\Big\{\sin^{n-1} v + \left(\frac{n-1}{n-2}\right)\sin^{n-3} v + \frac{(n-1)\,(n-3)}{(n-2)\,(n-4)}\sin^{n-5} v + \ldots\ldots\Big\}\cos v + C$$

z. B. wenn $n = 3$, $\int v\,.\,\sin^{2} v\,.\,\cos v\,.\,dv = \frac{v\,.\,\sin^{3} v}{3} + \frac{1}{9}\Big\{\sin^{2} v + 2\Big\}\cos v + C.$

Anmerkung. Das $\int v\,.\,\sin^{n-1} v\,.\,\cos v\,.\,dv$ kann ich auch anders schreiben, wenn ich $\sin v = x$ setze, dann ist $\cos v\,.\,dv = dx$, $v = \text{Arc}\sin x$ und es ist

$$\int x^{n-1}.\,\text{Arc}\sin x\,.\,dx = \frac{x^{n}.\,\text{Arc}\sin x}{n} + \frac{1}{n^2}\Big\{x^{n-1} + \left(\frac{n-1}{n-2}\right)x^{n-3} + \frac{(n-1)\,(n-3)}{(n-2)\,(n-4)}x^{n-5} + \frac{(n-1)\,(n-3)\,(n-5)}{(n-2)\,(n-4)\,(n-6)}x^{n-7} + \ldots\Big\}\sqrt{3-x^2} + C$$

oder auch

$$\int x^{n}.\,\text{Arc}\sin x\,.\,dx = \frac{x^{n+1}.\,\text{Arc}\sin x}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2}\Big\{x^{n} + \left(\frac{n}{n-1}\right)x^{n-2} + \frac{n\,(n-2)}{(n-1)\,(n-3)}x^{n-4} + \frac{n\,(n-2)\,(n-4)}{(n-1)\,(n-3)\,(n-5)}x^{n-6} + \ldots\Big\}\sqrt{1-x^2} + C;$$

wenn n gerade. —

Wenn nnn $y = x \,.\, \sin x \,.\, \cos^2 x$, so ist

$\frac{dy}{dx} = -2x \sin^2 x \,.\, \cos x + x \cos^3 x + \sin x \,.\, \cos^2 x$, also

$y = -2\int x \sin^2 x \,.\, \cos x \,.\, dx + \int x \cos^3 x \,.\, dx + \int \sin x \cos^2 x \,.\, dx$. Wie umseitig gefunden, ist

$\int x \sin^2 x \,.\, \cos x \,.\, dx = \frac{x \sin^3 x}{3} + \frac{1}{9}(\sin^2 x + 2)\cos x + C$; und nach der Formel $\int \sin x \cos^n x \, dx$ des §. 5 ist

$\int \sin x \,.\, \cos^2 x \, dx = -\frac{1}{3}\cos^3 x + C$. Daher ist

$$\int x \,.\, \cos^3 x \,.\, dx = \frac{2}{3} x \sin^3 x + \frac{2}{9}(\sin^2 x + 2)\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + x \sin x \cos^2 x + C.$$

$$= \frac{2}{3} x \sin x (1 - \cos^2 x) + \frac{2}{9}(3 - \cos^2 x)\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + x \sin x \cos^2 x + C$$

$$= \frac{2}{3} x \sin x - \frac{2}{3} x \cos^2 x \sin x + \frac{2}{3}\cos x - \frac{2}{9}\cos^3 x$$

$$+ \quad x \cos^2 x \sin x \qquad + \frac{1}{3}\cos^3 x$$

, folglich

1) $\int x \cos^3 x \,.\, dx = \frac{1}{9}\cos^3 x + \frac{1}{3} x \cos^2 x \sin x + \frac{2}{3} x \sin x + \frac{2}{3}\cos x + C.$

Es war also

$$\int x^{n+1} \cos^m x \,.\, dx = \frac{(n+1)\, x^n \,.\, \cos^m x}{m^2} + \frac{x^{n+1} \cos^{m-1} x \,.\, \sin x}{m} - \frac{n(n+1)}{m^2}\int x^{n-1} \,.\, \cos^m x \,.\, dx + \left(\frac{m-1}{m}\right)\int x^{n+1} \,.\, \cos^{m-2} x \,.\, dx$$

Wenn nnn $m = 3$ angenommen wurde, war entstanden

$$\int x^{n+1} \,.\, \cos^3 x \,.\, dx = \frac{(n+1)\, x^n \,.\, \cos^3 x}{9} + \frac{x^{n+1} \,.\, \cos^2 x \sin x}{3} + \frac{2}{3}\left\{ x^{n+1} - (n+1)\, n x^{n-1} + (n+1)\, n\, (n-1)\, (n-2)\, x^{n-3} \right.$$
$$\left. - \ldots \right\} \sin x + \frac{2}{3}\left\{ (n+1)\, x^n - (n+1)\, n\, (n-1)\, x^{n-2} + (n+1)\, n\, (n-1)\, (n-2)\, (n-3)\, x^{n-4} - \ldots \right\} \cos x$$
$$- \frac{n(n+1)}{9}\int x^{n-1} \,.\, \cos^3 x \, dx.$$

Ist jetzt $n = 1$ so entsteht

$$\int x^2 \,.\, \cos^3 x \, dx = \frac{2}{9} x \cos^3 x + \frac{x^2 \,.\, \cos^2 x \,.\, \sin x}{3} + \frac{2}{3}(x^2 - 2)\sin x + \frac{2}{3} \,.\, 2x \cos x - \frac{2}{9}\int \cos^3 x \, dx$$

$$= \frac{2}{9} x \cos^3 x + \frac{1}{3} x^2 \,.\, \cos^2 x \sin x + \frac{2}{3}(x^2 - 2)\sin x + \frac{4}{3} x \cos x - \frac{2}{27}\cos^2 x \sin x - \frac{4}{27}\sin x + C$$

also

2) $\int x^2 \,.\, \cos^3 x \,.\, dx = \frac{2}{9} x \cos^3 x + \left(\frac{1}{3} x^2 - \frac{2}{27}\right)\cos^2 x \,.\, \sin x + \left(\frac{2}{3} x^2 - \frac{40}{27}\right)\sin x + \frac{4}{3} x \cos x + C.$

Ist ferner im $\int x^{n+1} \,.\, \cos^3 x \,.\, dx$ $n = 2$, so entsteht

$$\int x^3 \,.\, \cos^3 x \,.\, dx = \frac{1}{3} x^2 \,.\, \cos^3 x + \frac{x^3 \,.\, \cos^2 x \,.\, \sin x}{3} + \frac{2}{3}(x^3 - 3 \,.\, 2x)\sin x + \frac{2}{3}(3x^2 - 3 \,.\, 2 \,.\, 1)\cos x - \frac{2}{3}\int x \cos^3 x \,.\, dx$$

$$= \frac{1}{3} x^2 \,.\, \cos^3 x + \frac{1}{3} x^3 \,.\, \cos^2 x \,.\, \sin x + \left(\frac{2}{3} x^3 - 4x\right)\sin x + (2x^2 - 4)\cos x$$

$$- \frac{2}{27}\cos^3 x - \frac{2}{9} x \cos^2 x \,.\, \sin x - \frac{4}{9} x \sin x - \frac{4}{9}\cos x + C$$

oder

3) $\int x^3 \,.\, \cos^3 x \,.\, dx = \left(\frac{1}{3} x^2 - \frac{2}{27}\right)\cos^3 x + \left(\frac{1}{3} x^3 - \frac{2}{9} x\right)\cos^2 x \sin x + \left(\frac{2}{3} x^3 - \frac{40}{9} x\right)\sin x + \left(2x^2 - \frac{40}{9}\right)\cos x + C$

Diese drei speciellen Integrale genügen, um die allgemeine Form hinlänglich zu erkennen, unter welcher überhaupt $\int x^n . \cos^3 x . dx$ erscheinen müsse. Die Integrale bestehen aus vier Theilen. Die Potenzen von x, welche mit $\cos^3 x$ und mit $\cos x$ multiplicirt sind, beginnen mit einem um 1 niedrigeren Exponenten, als derjenige. den das x unter dem Integralzeichen aufweist; die Potenzen hingegen, welche mit $\cos^2 x . \sin x$ und mit $\sin x$ multiplicirt sind, beginnen mit demselben Exponenten als das x unter dem Integralzeichen. Sämmtliche Potenzen fallen stets wieder um 2 Grad.

Es sei daher

$$\int x^n . \cos^3 x . dx = \left(Ax^{n-1} + Bx^{n-3} + Cx^{n-5} + Dx^{n-7} + \ldots.\right)\cos^3 x + \left(Ex^n + Fx^{n-2} + Gx^{n-4} + Hx^{n-6} + \ldots.\right)\cos^2 x . \sin x$$
$$+ \left(Ix^{n-1} + Kx^{n-3} + Lx^{n-5} + Mx^{n-7} + \ldots.\right)\cos x + \left(Nx^n + Ox^{n-2} + Px^{n-4} + Qx^{n-6} + \ldots.\right)\sin x + C.$$

Dann ergiebt sich durch Differenziren

$$x^n . \cos^3 x = -\left(Ax^{n-1} + Bx^{n-3} + Cx^{n-5} + Dx^{n-7} + \ldots\right) 3\cos^2 x \sin x + \cos^3 x \left\{A(n-1)x^{n-2} + B(n-3)x^{n-4} + C(n-5)x^{n-6} + D(n-7)x^{n-8} + \ldots\right\}$$
$$+ \left(Ex^n + Fx^{n-2} + Gx^{n-4} + Hx^{n-6} + \ldots\right)\cos^2 x . \cos x - \left(Ex^n + Fx^{n-2} + Gx^{n-4} + Hx^{n-6} + \ldots\right)\sin^2 x . 2\cos x$$
$$+ \cos^2 x . \sin x \left\{Enx^{n-1} + F(n-2)x^{n-3} + G(n-4)x^{n-5} + H(n-6)x^{n-7} + \ldots\right\} - \left(Ix^{n-1} + Kx^{n-3} + Lx^{n-5} + Mx^{n-7} + \ldots\right)\sin x$$
$$+ \cos x \left\{I(n-1)x^{n-2} + K(n-3)x^{n-4} + L(n-5)x^{n-6} + M(n-7)x^{n-8} + \ldots\right\} + \left(Nx^n + Ox^{n-2} + Px^{n-4} + Qx^{n-6} + \ldots\right)\cos x$$
$$+ \sin x \left\{Nnx^{n-1} + O(n-2)x^{n-3} + P(n-4)x^{n-5} + Q(n-6)x^{n-7} + \ldots\right\}$$

oder, mit Berücksichtigung, dass $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, geordnet

$$x^n . \cos^3 x = \left\{\begin{matrix} Ex^n + Fx^{n-2} & + & Gx^{n-4} & + & Hx^{n-6} + \ldots. \\ + A(n-1)x^{n-2} & + & B(n-3)x^{n-4} & + & C(n-5)x^{n-6} + \ldots. \\ + 2Ex^n + 2Fx^{n-2} & + & 2Gx^{n-4} & + & 2Hx^{n-6} + \ldots. \end{matrix}\right\}\cos^3 x$$
$$+ \left\{\begin{matrix} -3Ax^{n-1} & - & 3Bx^{n-3} & - & 3Cx^{n-5} & - & 3Dx^{n-7} - \ldots\ldots \\ + Enx^{n-1} & + & F(n-2)x^{n-3} & + & G(n-4)x^{n-5} & + & H(n-6)x^{n-7} + \ldots\ldots \end{matrix}\right\}\cos^2 x . \sin x$$
$$+ \left\{\begin{matrix} Nx^n + Ox^{n-2} & + & Px^{n-4} & + & Qx^{n-6} + \ldots \\ + I(n-1)x^{n-2} & + & K(n-3)x^{n-4} & + & L(n-5)x^{n-6} + \ldots \\ - 2Ex^n - 2Fx^{n-2} & - & 2Gx^{n-4} & - & 2Hx^{n-6} - \ldots \end{matrix}\right\}\cos x$$
$$+ \left\{\begin{matrix} Nnx^{n-1} & + & O(n-2)x^{n-3} & + & P(n-4)x^{n-5} & + & Q(n-6)x^{n-7} + \ldots. \\ - Ix^{n-1} & - & Kx^{n-3} & - & Lx^{n-5} & - & Mx^{n-7} - \ldots. \end{matrix}\right\}\sin x$$

Ich habe also zur Bestimmung der Coefficienten folgende Gleichungen

1) $3Ex^n . \cos^3 x = x^n . \cos^3 x$ daher $E = \frac{1}{3}$

2) $En - 3A = 0$ oder $A = E\left(\frac{n}{3}\right)$ daher $A = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{n}{3}\right)$

3) $3F + A(n-1) = 0$ oder $F = -A\left(\frac{n-1}{3}\right)$ daher $F = -\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{n}{3}\right)\left(\frac{n-1}{3}\right)$

4) $F(n-2) - 3B = 0$ oder $B = F\left(\frac{n-2}{3}\right)$ daher $B = -\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{n}{3}\right)\left(\frac{n-1}{3}\right)\left(\frac{n-2}{3}\right)$

5) $3G + B(n-3) = 0$ oder $G = -B\left(\frac{n-3}{3}\right)$ daher $G = +\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{n}{3}\right)\left(\frac{n-1}{3}\right)\left(\frac{n-2}{3}\right)\left(\frac{n-3}{3}\right)$

6) $G(n-4) - 3C = 0$ oder $C = G\left(\frac{n-4}{3}\right)$ daher $C = +\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{n}{3}\right)\left(\frac{n-1}{3}\right)\left(\frac{n-2}{3}\right)\left(\frac{n-3}{3}\right)\left(\frac{n-4}{3}\right)$

7) $N - 2E = 0$ oder $N = 2E$ daher $N = \frac{2}{3}$

8) $Nn - I = 0$ oder $I = Nn$ daher $I = \frac{2}{3}n$

9) $O + I(n-1) - 2F = 0$ oder $O = 2F - I(n-1) = -2\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{n}{3}\right)\left(\frac{n-1}{3}\right) - \frac{2}{3}n(n-1)$ daher $O = -\left(\frac{2}{3}\right).10.\left(\frac{n}{3}\right)\left(\frac{n-1}{3}\right)$

10) $O(n-2) = K$ daher $K = -\left(\frac{2}{3}\right).10.\left(\frac{n}{3}\right)\left(\frac{n-1}{3}\right)(n-2)$

11) $P + K(n-3) - 2G = 0$ oder $P = 2G - K(n-3) = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{n}{3}\right)\left(\frac{n-1}{3}\right)\left(\frac{n-2}{3}\right)\left(\frac{n-3}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}\right).10.\left(\frac{n}{3}\right)\left(\frac{n-1}{3}\right)(n-2)(n-3)$

daher $P = \left(\frac{2}{3}\right).91.\left(\frac{n}{3}\right)\left(\frac{n-1}{3}\right)\left(\frac{n-2}{3}\right)\left(\frac{n-3}{3}\right)$

12) $P(n-4) = L$ daher $L = \left(\frac{2}{3}\right).91.\left(\frac{n}{3}\right)\left(\frac{n-1}{3}\right)\left(\frac{n-2}{3}\right)\left(\frac{n-3}{3}\right)(n-4)$

13) $3H + C(n-5) = 0$ oder $H = -C\left(\frac{n-5}{3}\right)$ daher $H = -\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{n}{3}\right)\left(\frac{n-1}{3}\right)\left(\frac{n-1}{3}\right)\left(\frac{n-3}{3}\right)\left(\frac{n-4}{3}\right)\left(\frac{n-5}{3}\right)$

14) $Q + L(n-5) - 2H = 0$ oder $Q = 2H - L(n-5)$, also

$Q = -\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{n}{3}\right)\left(\frac{n-1}{3}\right)\left(\frac{n-2}{3}\right)\left(\frac{n-3}{3}\right)\left(\frac{n-4}{3}\right)\left(\frac{n-5}{3}\right) - \left(\frac{2}{3}\right).91.\left(\frac{n}{3}\right)\left(\frac{n-1}{3}\right)\left(\frac{n-2}{3}\right)\left(\frac{n-3}{3}\right)(n-4)(n-5)$, daher

$Q = -\left(\frac{2}{3}\right).820.\left(\frac{n}{3}\right)\left(\frac{n-1}{3}\right)\left(\frac{n-2}{3}\right)\left(\frac{n-3}{3}\right)\left(\frac{n-4}{3}\right)\left(\frac{n-5}{3}\right)$

15) $H(n-6) - 3D = 0$ oder $D = H\left(\frac{n-6}{3}\right)$ daher $D = -\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{n}{3}\right)\left(\frac{n-1}{3}\right)\left(\frac{n-2}{3}\right)\left(\frac{n-3}{3}\right)\left(\frac{n-4}{3}\right)\left(\frac{n-5}{3}\right)\left(\frac{n-6}{3}\right)$

16) $Q(n-6) - M = 0$ oder $M = Q(n-6)$ daher $M = -\left(\frac{2}{3}\right).820.\left(\frac{n}{3}\right)\left(\frac{n-1}{3}\right)\left(\frac{n-2}{3}\right)\left(\frac{n-3}{3}\right)\left(\frac{n-4}{3}\right)\left(\frac{n-5}{3}\right)(n-6)$

Es entsteht daher folgendes Integral

$$\int x^n . \cos^3 x . dx = \Big\{\left(\tfrac{1}{3}\right)\left(\tfrac{n}{3}\right)x^{n-1} - \left(\tfrac{1}{3}\right)\left(\tfrac{n}{3}\right)\left(\tfrac{n-1}{3}\right)\left(\tfrac{n-2}{3}\right)x^{n-3} + \left(\tfrac{1}{3}\right)\left(\tfrac{n}{3}\right)\left(\tfrac{n-1}{3}\right)\left(\tfrac{n-2}{3}\right)\left(\tfrac{n-3}{3}\right)\left(\tfrac{n-4}{3}\right)x^{n-5}$$
$$- \left(\tfrac{1}{3}\right)\left(\tfrac{n}{3}\right)\left(\tfrac{n-1}{3}\right)\left(\tfrac{n-2}{3}\right)\left(\tfrac{n-3}{3}\right)\left(\tfrac{n-4}{3}\right)\left(\tfrac{n-5}{3}\right)\left(\tfrac{n-6}{3}\right)x^{n-7} + \ldots\ldots\ldots\ldots \Big\} \cos^3 x$$
$$+ \Big\{\left(\tfrac{1}{3}\right)x^n - \left(\tfrac{1}{3}\right)\left(\tfrac{n}{3}\right)\left(\tfrac{n-1}{3}\right)x^{n-2} + \left(\tfrac{1}{3}\right)\left(\tfrac{n}{3}\right)\left(\tfrac{n-1}{3}\right)\left(\tfrac{n-2}{3}\right)\left(\tfrac{n-3}{3}\right)x^{n-4} - \left(\tfrac{1}{3}\right)\left(\tfrac{n}{3}\right)\left(\tfrac{n-1}{3}\right)\left(\tfrac{n-2}{3}\right)\left(\tfrac{n-3}{3}\right)\left(\tfrac{n-4}{3}\right)\left(\tfrac{n-5}{3}\right)x^{n-6} + \ldots\Big\} \cos^2 x . \sin x$$
$$+ \Big\{\left(\tfrac{2}{3}\right)nx^{n-1} - \left(\tfrac{2}{3}\right).10.\left(\tfrac{n}{3}\right)\left(\tfrac{n-1}{3}\right)(n-2)x^{n-3} + \left(\tfrac{2}{3}\right).91.\left(\tfrac{n}{3}\right)\left(\tfrac{n-1}{3}\right)\left(\tfrac{n-2}{3}\right)\left(\tfrac{n-3}{3}\right)(n-4)x^{n-5}$$
$$- \left(\tfrac{2}{3}\right).820.\left(\tfrac{n}{3}\right)\left(\tfrac{n-1}{3}\right)\left(\tfrac{n-2}{3}\right)\left(\tfrac{n-3}{3}\right)\left(\tfrac{n-4}{3}\right)\left(\tfrac{n-5}{3}\right)(n-6)x^{n-7} + \ldots\ldots\ldots \Big\} \cos x$$
$$+ \Big\{\left(\tfrac{2}{3}\right)x^n - \left(\tfrac{2}{3}\right).10.\left(\tfrac{n}{3}\right)\left(\tfrac{n-1}{3}\right)x^{n-2} + \left(\tfrac{2}{3}\right).91.\left(\tfrac{n}{3}\right)\left(\tfrac{n-1}{3}\right)\left(\tfrac{n-2}{3}\right)\left(\tfrac{n-3}{3}\right)x^{n-4} - \left(\tfrac{2}{3}\right).820.\left(\tfrac{n}{3}\right)\left(\tfrac{n-1}{3}\right)\left(\tfrac{n-2}{3}\right)\left(\tfrac{n-3}{3}\right)\left(\tfrac{n-4}{3}\right)\left(\tfrac{n-5}{3}\right)x^{n-6} + \ldots\Big\} \sin x + C.$$

oder, wenn ich das Integral noch etwas umschreibe,

$$\int x^n . \cos^3 x . dx = \tfrac{n}{9}\Big\{x^{n-1} - \left(\tfrac{n-1}{3}\right)\left(\tfrac{n-2}{3}\right)x^{n-3} + \left(\tfrac{n-1}{3}\right)\left(\tfrac{n-2}{3}\right)\left(\tfrac{n-3}{3}\right)\left(\tfrac{n-4}{3}\right)x^{n-5} - \left(\tfrac{n-1}{3}\right)\left(\tfrac{n-2}{3}\right)\left(\tfrac{n-3}{3}\right)\left(\tfrac{n-4}{3}\right)\left(\tfrac{n-5}{3}\right)\left(\tfrac{n-6}{3}\right)x^{n-7} + \ldots\Big\} \cos^3 x$$
$$+ \tfrac{1}{3}\Big\{x^n - \left(\tfrac{n}{3}\right)\left(\tfrac{n-1}{3}\right)x^{n-2} + \left(\tfrac{n}{3}\right)\left(\tfrac{n-1}{3}\right)\left(\tfrac{n-2}{3}\right)\left(\tfrac{n-3}{3}\right)x^{n-4} - \left(\tfrac{n}{3}\right)\left(\tfrac{n-1}{3}\right)\left(\tfrac{n-2}{3}\right)\left(\tfrac{n-3}{3}\right)\left(\tfrac{n-4}{3}\right)\left(\tfrac{n-5}{3}\right)x^{n-6} + \ldots\Big\} \cos^2 x . \sin x$$
$$+ \tfrac{2}{3}n\Big\{x^{n-1} - 10.\left(\tfrac{n-1}{3}\right)\left(\tfrac{n-2}{3}\right)x^{n-3} + 91.\left(\tfrac{n-1}{3}\right)\left(\tfrac{n-2}{3}\right)\left(\tfrac{n-3}{3}\right)\left(\tfrac{n-4}{3}\right)x^{n-5} - 820.\left(\tfrac{n-1}{3}\right)\left(\tfrac{n-2}{3}\right)\left(\tfrac{n-3}{3}\right)\left(\tfrac{n-4}{3}\right)\left(\tfrac{n-5}{3}\right)\left(\tfrac{n-6}{3}\right)x^{n-7} + \ldots\Big\} \cos x$$
$$+ \tfrac{2}{3}\Big\{x^n - 10.\left(\tfrac{n}{3}\right)\left(\tfrac{n-1}{3}\right)x^{n-2} + 91.\left(\tfrac{n}{3}\right)\left(\tfrac{n-1}{3}\right)\left(\tfrac{n-2}{3}\right)\left(\tfrac{n-3}{3}\right)x^{n-4} - 820.\left(\tfrac{n}{3}\right)\left(\tfrac{n-1}{3}\right)\left(\tfrac{n-2}{3}\right)\left(\tfrac{n-3}{3}\right)\left(\tfrac{n-4}{3}\right)\left(\tfrac{n-5}{3}\right)x^{n-6} + \ldots\Big\} \sin x + C.$$

Es ist nur noch zu bemerken, dass die Factoren 10, 91, 820 u. s. w., wie sich aus der Bestimmung der Coefficienten ergiebt, derartig entstanden sind, dass jeder folgende derselben das Neunfache des vorhergehenden ist, plus 1, also $91 = (10 . 9) + 1$, $820 = (91 . 9) + 1$. Diese Factoren würden sich also mit 7381, 66430, 597871, 5380840 u. s. w. fortsetzen. — Es sei beispielsweise $n = 8$, dann müsste sein

$$y = \int x^8 . \cos^3 x \,.\, dx = \tfrac{8}{9} \left\{ x^7 - \left(\tfrac{7}{3}\right)\left(\tfrac{6}{3}\right) x^5 + \left(\tfrac{7}{3}\right)\left(\tfrac{6}{3}\right)\left(\tfrac{5}{3}\right)\left(\tfrac{4}{3}\right) x^3 - \left(\tfrac{7}{3}\right)\left(\tfrac{6}{3}\right)\left(\tfrac{5}{3}\right)\left(\tfrac{4}{3}\right)\left(\tfrac{3}{3}\right)\left(\tfrac{2}{3}\right) x \right\} \cos^3 x$$

$$+ \tfrac{1}{3} \left\{ x^8 - \left(\tfrac{8}{3}\right)\left(\tfrac{7}{3}\right) x^6 + \left(\tfrac{8}{3}\right)\left(\tfrac{7}{3}\right)\left(\tfrac{6}{3}\right)\left(\tfrac{5}{3}\right) x^4 - \left(\tfrac{8}{3}\right)\left(\tfrac{7}{3}\right)\left(\tfrac{6}{3}\right)\left(\tfrac{5}{3}\right)\left(\tfrac{4}{3}\right)\left(\tfrac{3}{3}\right) x^2 + \left(\tfrac{8}{3}\right)\left(\tfrac{7}{3}\right)\left(\tfrac{6}{3}\right)\left(\tfrac{5}{3}\right)\left(\tfrac{4}{3}\right)\left(\tfrac{3}{3}\right)\left(\tfrac{2}{3}\right)\left(\tfrac{1}{3}\right) \right\} \cos^2 x \sin x$$

$$+ \tfrac{2}{3} . 8 \left\{ x^7 - 10 . \left(\tfrac{7}{3}\right)\left(\tfrac{6}{3}\right) x^5 + 91 . \left(\tfrac{7}{3}\right)\left(\tfrac{6}{3}\right)\left(\tfrac{5}{3}\right)\left(\tfrac{4}{3}\right) x^3 - 820 . \left(\tfrac{7}{3}\right)\left(\tfrac{6}{3}\right)\left(\tfrac{5}{3}\right)\left(\tfrac{4}{3}\right)\left(\tfrac{3}{3}\right)\left(\tfrac{2}{3}\right) x \right\} \cos x$$

$$+ \tfrac{2}{3} \left\{ x^8 - 10 . \left(\tfrac{8}{3}\right)\left(\tfrac{7}{3}\right) x^6 + 91 . \left(\tfrac{8}{3}\right)\left(\tfrac{7}{3}\right)\left(\tfrac{6}{3}\right)\left(\tfrac{5}{3}\right) x^4 - 820 . \left(\tfrac{8}{3}\right)\left(\tfrac{7}{3}\right)\left(\tfrac{6}{3}\right)\left(\tfrac{5}{3}\right)\left(\tfrac{4}{3}\right)\left(\tfrac{3}{3}\right) x^2$$

$$+ 7381 . \left(\tfrac{8}{3}\right)\left(\tfrac{7}{3}\right)\left(\tfrac{6}{3}\right)\left(\tfrac{5}{3}\right)\left(\tfrac{4}{3}\right)\left(\tfrac{3}{3}\right)\left(\tfrac{2}{3}\right)\left(\tfrac{1}{3}\right) \right\} \sin x + C.$$

oder

$$y = \int x^8 . \cos^3 x \,.\, dx = \left(\tfrac{8}{9} x^7 - \tfrac{112}{27} x^5 + \tfrac{2240}{243} x^3 - \tfrac{4480}{729} x \right) \cos^3 x$$

$$+ \left(\tfrac{1}{3} x^8 - \tfrac{56}{27} x^6 + \tfrac{560}{81} x^4 - \tfrac{2240}{243} x^2 + \tfrac{4480}{2187} \right) \cos^2 x \,.\, \sin x$$

$$+ \left(\tfrac{16}{3} x^7 - \tfrac{2240}{9} x^5 + \tfrac{407680}{81} x^3 - \tfrac{7347200}{243} x \right) \cos x$$

$$+ \left(\tfrac{2}{3} x^8 - \tfrac{1120}{27} x^6 + \tfrac{101920}{81} x^4 - \tfrac{3673600}{243} x^2 + \tfrac{66133760}{2187} \right) \sin x + C.$$

dann müsste aber auch sein

$$\tfrac{dy}{dx} = - \left(\tfrac{8}{9} x^7 - \tfrac{112}{27} x^5 + \tfrac{2240}{243} x^3 - \tfrac{4480}{729} x \right) . 3 \cos^2 x \sin x + \cos^3 x \left(\tfrac{8}{9} . 7 x^6 - \tfrac{112}{27} . 5 x^4 + \tfrac{2240}{243} . 3 x^2 - \tfrac{4480}{729} \right)$$

$$+ \left(\tfrac{1}{3} x^8 - \tfrac{56}{27} x^6 + \tfrac{560}{81} x^4 - \tfrac{2240}{243} x^2 + \tfrac{4480}{2187} \right) \cos^3 x - 2 \sin^2 x \,.\, \cos x \left(\tfrac{1}{3} x^8 - \tfrac{56}{27} x^6 + \tfrac{560}{81} x^4 - \tfrac{2240}{243} x^2 + \tfrac{4480}{2187} \right)$$

$$+ \cos^2 x \,.\, \sin x \left(\tfrac{1}{3} . 8 x^7 - \tfrac{56}{27} . 6 x^5 + \tfrac{560}{81} . 4 x^3 - \tfrac{2240}{243} . 2 x \right)$$

$$- \left(\tfrac{16}{3} x^7 - \tfrac{2240}{9} x^5 + \tfrac{407680}{81} x^3 - \tfrac{7347200}{243} x \right) \sin x + \cos x \left(\tfrac{16}{3} . 7 x^6 - \tfrac{2240}{9} . 5 x^4 + \tfrac{407680}{81} . 3 x^2 - \tfrac{7347200}{243} \right)$$

$$+ \cos x \left(\tfrac{2}{3} x^8 - \tfrac{1120}{27} x^6 + \tfrac{101920}{81} x^4 - \tfrac{3673600}{243} x^2 + \tfrac{66133760}{2187} \right) + \sin x \left(\tfrac{2}{3} . 8 x^7 - \tfrac{1120}{27} . 6 x^5 + \tfrac{101920}{81} . 4 x^3 - \tfrac{3673600}{243} . 2 x \right)$$

oder mit Berücksichtigung, dass $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, geordnet

$$\tfrac{dy}{dx} = - \tfrac{8}{3} x^7 . \cos^2 x \,.\, \sin x + \tfrac{112}{9} x^5 . \cos^2 x \,.\, \sin x - \tfrac{2240}{81} x^3 . \cos^2 x \,.\, \sin x + \tfrac{4480}{243} x \,.\, \cos^2 x \,.\, \sin x$$

$$+ \tfrac{8}{3} x^7 . \cos^2 x \,.\, \sin x - \tfrac{112}{9} x^5 . \cos^2 x \,.\, \sin x + \tfrac{2240}{81} x^3 . \cos^2 x \,.\, \sin x - \tfrac{4480}{243} x \,.\, \cos^2 x \,.\, \sin x$$

$$+ \tfrac{1}{3} x^8 . \cos^3 x - \tfrac{56}{27} x^6 . \cos^3 x + \tfrac{560}{81} x^4 . \cos^3 x - \tfrac{2240}{243} x^2 . \cos^3 x + \tfrac{4480}{2187} \cos^3 x$$

$$+ \tfrac{56}{9} x^6 . \cos^3 x - \tfrac{560}{27} x^4 . \cos^3 x + \tfrac{6720}{243} x^2 . \cos^3 x - \tfrac{4480}{729} \cos^3 x$$

$$+ \tfrac{2}{3} x^8 . \cos^3 x - \tfrac{112}{27} x^6 . \cos^3 x + \tfrac{1120}{81} x^4 . \cos^3 x - \tfrac{4480}{243} x^2 . \cos^3 x + \tfrac{8960}{2187} \cos^3 x$$

$$+ \tfrac{2}{3} x^8 . \cos x - \tfrac{1120}{27} x^6 . \cos x + \tfrac{101920}{81} x^4 . \cos x - \tfrac{3673600}{243} x^2 . \cos x + \tfrac{66133760}{2187} \cos x$$

$$- \tfrac{2}{3} x^8 . \cos x + \tfrac{112}{27} x^6 . \cos x - \tfrac{1120}{81} x^4 . \cos x + \tfrac{4480}{243} x^2 . \cos x - \tfrac{8960}{2187} \cos x$$

$$+ \tfrac{112}{3} x^6 . \cos x - \tfrac{11200}{9} x^4 . \cos x + \tfrac{1223040}{81} x^2 . \cos x - \tfrac{7347200}{243} \cos x$$

$$- \tfrac{16}{3} x^7 . \sin x + \tfrac{2240}{9} x^5 . \sin x - \tfrac{407680}{81} x^3 . \sin x + \tfrac{7347200}{243} x \sin x$$

$$+ \tfrac{16}{3} x^7 . \sin x - \tfrac{2240}{9} x^5 . \sin x + \tfrac{407680}{81} x^3 . \sin x - \tfrac{7347200}{243} x \sin x$$

Da sich die übrigen Glieder sämmtlich hinwegheben, bleibt in der That nur übrig $\frac{dy}{dx} = x^n . \cos^3 x$, woraus die Richtigkeit des Integrales erhellt. —

Durch theilweise Integration des $\int x^n . \cos^3 x . dx$ ergiebt sich demnächst $\int x^n . \sin^3 x . dx$

Wenn $u = x^n . \cos^3 x$ und $v = x$, so ist

$\frac{du}{dx} = - x^n . 3 . \cos^2 x . \sin x + \cos^3 x . \left(n x^{n-1}\right)$, daher

$v . du = - 3 x^{n+1} . \cos^2 x . \sin x . dx + n x^n . \cos^3 x . dx$. Es ist daher

$\int x^n . \cos^3 x . dx = x^{n+1} . \cos^3 x + 3 \int x^{n+1} . \cos^2 x . \sin x . dx - n \int x^n . \cos^3 x . dx$ oder

$(n+1) \int x^n . \cos^3 x . dx = x^{n+1} . \cos^3 x + 3 \int x^{n+1} . \cos^2 x . \sin x . dx$, folglich

$\int x^{n+1} . \cos^2 x . \sin x . dx = - \frac{x^{n+1} . \cos^3 x}{3} + \left(\frac{n+1}{3}\right) \int x^n . \cos^3 x . dx$, und

$\int x^n . \cos^2 x . \sin x . dx = - \frac{x^n . \cos^3 x}{3} + \frac{n}{3} \int x^{n-1} . \cos^3 x . dx$. Letzteres Integral ist dem $\int x^n . \cos^3 x . dx$ leicht zu entnehmen, und es ist deshalb

$$\int x^n . \cos^2 x . \sin x . dx = - \frac{x^n \cos^3 x}{3} + \frac{n(n-1)}{27} \left\{ x^{n-2} - \left(\frac{n-2}{3}\right)\left(\frac{n-3}{3}\right) x^{n-4} + \left(\frac{n-2}{3}\right)\left(\frac{n-3}{3}\right)\left(\frac{n-4}{3}\right)\left(\frac{n-5}{3}\right) x^{n-6} - \ldots\ldots \right\} \cos^3 x$$
$$+ \frac{n}{9} \left\{ x^{n-1} - \left(\frac{n-1}{3}\right)\left(\frac{n-2}{3}\right) x^{n-3} + \left(\frac{n-1}{3}\right)\left(\frac{n-2}{3}\right)\left(\frac{n-3}{3}\right)\left(\frac{n-4}{3}\right) x^{n-5} - \left(\frac{n-1}{3}\right)\left(\frac{n-2}{3}\right)\left(\frac{n-3}{3}\right)\left(\frac{n-4}{3}\right)\left(\frac{n-5}{3}\right)\left(\frac{n-6}{3}\right) x^{n-7} + \ldots\ldots \right\} \cos^2 x . \sin x$$
$$+ \frac{2}{9} n(n-1) \left\{ x^{n-2} - 10 \left(\frac{n-2}{3}\right)\left(\frac{n-3}{3}\right) x^{n-4} + 91 \left(\frac{n-2}{3}\right)\left(\frac{n-3}{3}\right)\left(\frac{n-4}{3}\right)\left(\frac{n-5}{3}\right) x^{n-6} - 820 \left(\frac{n-2}{3}\right)\left(\frac{n-3}{3}\right)\left(\frac{n-4}{3}\right)\left(\frac{n-5}{3}\right)\left(\frac{n-6}{3}\right)\left(\frac{n-7}{3}\right) x^{n-8} + \ldots \right\} \cos x$$
$$+ \frac{2}{9} n \left\{ x^{n-1} - 10 \left(\frac{n-1}{3}\right)\left(\frac{n-2}{3}\right) x^{n-3} + 91 \left(\frac{n-1}{3}\right)\left(\frac{n-2}{3}\right)\left(\frac{n-3}{3}\right)\left(\frac{n-4}{3}\right) x^{n-5} - 820 \left(\frac{n-1}{3}\right)\left(\frac{n-2}{3}\right)\left(\frac{n-3}{3}\right)\left(\frac{n-4}{3}\right)\left(\frac{n-5}{3}\right)\left(\frac{n-6}{3}\right) x^{n-7} + \ldots \right\} \sin x + C.$$

Da nun aber $\int x^n . \cos^2 x . \sin x . dx = \int x^n . (1 - \sin^2 x) . \sin x . dx = \int x^n . \sin x . dx - \int x^n . \sin^3 x \, dx$,
so entsteht

$$\underline{\int x^n . \sin^3 x . dx} = \frac{x^n . \cos^3 x}{3} - \frac{n(n-1)}{27} \left\{ x^{n-2} - \left(\frac{n-2}{3}\right)\left(\frac{n-3}{3}\right) x^{n-4} + \left(\frac{n-2}{3}\right)\left(\frac{n-3}{3}\right)\left(\frac{n-4}{3}\right)\left(\frac{n-5}{3}\right) x^{n-6} - \ldots \right\} \cos^3 x$$
$$- \frac{n}{9} \left\{ x^{n-1} - \left(\frac{n-1}{3}\right)\left(\frac{n-2}{3}\right) x^{n-3} + \left(\frac{n-1}{3}\right)\left(\frac{n-2}{3}\right)\left(\frac{n-3}{3}\right)\left(\frac{n-4}{3}\right) x^{n-5} - \left(\frac{n-1}{3}\right)\left(\frac{n-2}{3}\right)\left(\frac{n-3}{3}\right)\left(\frac{n-4}{3}\right)\left(\frac{n-5}{3}\right)\left(\frac{n-6}{3}\right) x^{n-7} + \ldots \right\} \cos^2 x . \sin x$$
$$- \frac{2}{9} n(n-1) \left\{ x^{n-2} - 10.\left(\frac{n-2}{3}\right)\left(\frac{n-3}{3}\right) x^{n-4} + 91.\left(\frac{n-2}{3}\right)\left(\frac{n-3}{3}\right)\left(\frac{n-4}{3}\right)\left(\frac{n-5}{3}\right) x^{n-6} - 820.\left(\frac{n-2}{3}\right)\left(\frac{n-3}{3}\right)\left(\frac{n-4}{3}\right)\left(\frac{n-5}{3}\right)\left(\frac{n-6}{3}\right)\left(\frac{n-7}{3}\right) x^{n-8} + \ldots \right\} \cos x$$
$$- \frac{2}{9} n \left\{ x^{n-1} - 10.\left(\frac{n-1}{3}\right)\left(\frac{n-2}{3}\right) x^{n-3} + 91.\left(\frac{n-1}{3}\right)\left(\frac{n-2}{3}\right)\left(\frac{n-3}{3}\right)\left(\frac{n-4}{3}\right) x^{n-5} - 820.\left(\frac{n-1}{3}\right)\left(\frac{n-2}{3}\right)\left(\frac{n-3}{3}\right)\left(\frac{n-4}{3}\right)\left(\frac{n-5}{3}\right)\left(\frac{n-6}{3}\right) x^{n-7} + \ldots \right\} \sin x$$
$$- \left\{ x^n - n(n-1) x^{n-2} + n(n-1)(n-2)(n-3) x^{n-4} - n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5) x^{n-6} + \ldots\ldots \right\} \cos x$$
$$+ \left\{ n x^{n-1} - n(n-1)(n-2) x^{n-3} + n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) x^{n-5} - n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6) x^{n-7} + \ldots \right\} \sin x + C.$$

§. 9.

Die im vorhergehenden §. entwickelte **Reductionsformel** lautete

$$\int x^{n+1} . \cos^m x . dx = \frac{(n+1) x^n . \cos^m x}{m^2} + \frac{x^{n+1} . \cos^{m-1} x . \sin x}{m} - \frac{n(n+1)}{m^2} \int x^{n-1} . \cos^m x . dx + \left(\frac{m-1}{m}\right) \int x^{n+1} . \cos^{m-2} x . dx.$$

Es sei nun $m = 4$, dann ist

$$\int x^{n+1} . \cos^4 x . dx = \frac{(n+1) x^n . \cos^4 x}{16} + \frac{x^{n+1} . \cos^3 x . \sin x}{4} - \frac{n(n+1)}{16} \int x^{n-1} . \cos^4 x . dx + \frac{3}{4} \int x^{n+1} . \cos^2 x . dx.$$

Letzteres Integral kann dem $\int x^n . \cos^2 x . dx$ des §. 7 leicht entnommen werden, und deshalb entsteht

$$\int x^{n+1} . \cos^4 x . dx = \frac{(n+1) x^n . \cos^4 x}{16} + \frac{x^{n+1} . \cos^3 x . \sin x}{4} + \frac{3 x^{n+2}}{8(n+2)} - \frac{3(n+1)}{32} \Big\{ x^n - \left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}\right) x^{n-2} + \left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{2}\right)\left(\frac{n-3}{2}\right) x^{n-4}$$

$$- \left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{2}\right)\left(\frac{n-3}{2}\right)\left(\frac{n-4}{2}\right)\left(\frac{n-5}{2}\right) x^{n-6} + \ldots . \Big\}$$

$$+ \frac{3}{8} \Big\{ x^{n+1} - \left(\frac{n+1}{2}\right)\left(\frac{n}{2}\right) x^{n-1} + \left(\frac{n+1}{2}\right)\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{2}\right) x^{n-3} - \left(\frac{n+1}{2}\right)\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{2}\right)\left(\frac{n-3}{2}\right)\left(\frac{n-4}{2}\right) x^{n-5} + \ldots . \Big\} \sin x . \cos x$$

$$+ \frac{3(n+1)}{16} \Big\{ x^n - \left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}\right) x^{n-2} + \left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{2}\right)\left(\frac{n-3}{2}\right) x^{n-4} - \left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{2}\right)\left(\frac{n-3}{2}\right)\left(\frac{n-4}{2}\right)\left(\frac{n-5}{2}\right) x^{n-6} + \ldots . \Big\} \cos^2 x$$

$- \frac{n(n+1)}{16} \int x^{n-1} . \cos^4 x . dx$. Es sei $n = 1$, so entsteht

$$\int x^2 . \cos^4 x . dx = \frac{2 x \cos^4 x}{16} + \frac{x^2 . \cos^3 x \sin x}{4} + \frac{3 x^3}{24} - \frac{3 . 2 x}{32} + \frac{3}{8} \Big\{ x^2 - \left(\frac{2}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) \Big\} \sin x \cos x$$

$$+ \frac{3 . 2}{16} x \cos^2 x - \frac{1 . 2}{16} \int \cos^4 x \, dx,$$

und weil $\int \cos^4 x \, dx = \frac{1}{4} \cos^3 x \sin x + \frac{3}{8} \cos x \sin x + \frac{3}{8} x + C$, so wird

$$\int x^2 . \cos^4 x . dx = \frac{x \cos^4 x}{8} + \frac{x^2 \cos^3 x \sin x}{4} + \frac{x^3}{8} - \frac{3x}{16} + \left(\frac{3}{8} x^2 - \frac{3}{16}\right) \sin x \cos x + \frac{3}{8} x \cos^2 x$$

$$- \frac{1}{32} \cos^3 x \sin x - \frac{3}{64} \cos x \sin x - \frac{3}{64} x + C \quad \text{oder}$$

$$\int x^2 . \cos^4 x \, dx = \frac{1}{8} x \cos^4 x + \left(\frac{x^2}{4} - \frac{1}{32}\right) \cos^3 x \sin x + \frac{3}{8} x \cos^2 x + \left(\frac{3}{8} x^2 - \frac{15}{64}\right) \cos x \sin x + \frac{x^3}{8} - \frac{15}{64} x + C.$$

Dieses Beispiel genügt, um die Form zu erkennen, unter welcher überhaupt $\int x^n . \cos^4 x . dx$ erscheint, und es kann daher sogleich zu dieser Verallgemeinerung geschritten werden.

Es sei

$$\int x^n . \cos^4 x . dx = ax^{n+1} + bx^{n-1} + cx^{n-3} + fx^{n-5} + gx^{n-7} + \ldots .$$

$$+ \left(hx^n + kx^{n-2} + px^{n-4} + qx^{n-6} + rx^{n-8} + \ldots . \right) \cos x \sin x$$

$$+ \left(sx^{n-1} + tx^{n-3} + ux^{n-5} + vx^{n-7} + wx^{n-9} + \ldots . \right) \cos^2 x$$

$$+ \left(Ax^n + Bx^{n-2} + Cx^{n-4} + Dx^{n-6} + Ex^{n-8} + \ldots . \right) \cos^3 x \sin x$$

$$+ \left(Fx^{n-1} + Gx^{n-3} + Hx^{n-5} + Ix^{n-7} + Kx^{n-9} + \ldots . \right) \cos^4 x + C.$$

Alsdann ergiebt sich durch Differenziation

$$
\begin{aligned}
x^n \cdot \cos^4 x = {} & a(n+1)x^n + b(n-1)x^{n-2} + c(n-3)x^{n-4} + f(n-5)x^{n-6} + g(n-7)x^{n-8} + \ldots\ldots \\
& + \left(hx^n + kx^{n-2} + px^{n-4} + qx^{n-6} + rx^{n-8} + \ldots\ldots\right) \cos^2 x \\
& - \left(hx^n + kx^{n-2} + px^{n-4} + qx^{n-6} + rx^{n-8} + \ldots\ldots\right) \sin^2 x \\
& + \left\{hnx^{n-1} + k(n-2)x^{n-3} + p(n-4)x^{n-5} + q(n-6)x^{n-7} + r(n-8)x^{n-9} + \ldots\ldots\right\} \sin x \cos x \\
& - \left(sx^{n-1} + tx^{n-3} + ux^{n-5} + vx^{n-7} + wx^{n-9} + \ldots\ldots\right) 2 \cos x \sin x \\
& + \left\{s(n-1)x^{n-2} + t(n-3)x^{n-4} + u(n-5)x^{n-6} + v(n-7)x^{n-8} + w(n-9)x^{n-10} + \ldots\ldots\right\} \cos^2 x \\
& + \left(Ax^n + Bx^{n-2} + Cx^{n-4} + Dx^{n-6} + Ex^{n-8} + \ldots\ldots\right) \cos^4 x \\
& - 3\left(Ax^n + Bx^{n-2} + Cx^{n-4} + Dx^{n-6} + Ex^{n-8} + \ldots\ldots\right) \sin^2 x \cdot \cos^2 x \\
& + \left\{Anx^{n-1} + B(n-2)x^{n-3} + C(n-4)x^{n-5} + D(n-6)x^{n-7} + E(n-8)x^{n-9} + \ldots\ldots\right\} \cos^3 x \sin x \\
& - \left(Fx^{n-1} + Gx^{n-3} + Hx^{n-5} + Ix^{n-7} + Kx^{n-9} + \ldots\ldots\right) 4 \cos^3 x \sin x \\
& + \left\{F(n-1)x^{n-2} + G(n-3)x^{n-4} + H(n-5)x^{n-6} + I(n-7)x^{n-8} + K(n-9)x^{n-10} + \ldots\ldots\right\} \cos^4 x
\end{aligned}
$$

Diese Gleichung ordne ich, mit Berücksichtigung, dass $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, und erhalte demnächst folgende andere:

$$
\begin{aligned}
x^n \cdot \cos^4 x = {} & a(n+1)x^n + b(n-1)x^{n-2} + c(n-3)x^{n-4} + f(n-5)x^{n-6} + g(n-7)x^{n-8} + \ldots \\
& - hx^n - kx^{n-2} - px^{n-4} - qx^{n-6} - rx^{n-8} - \ldots \\
& + \left\{\begin{array}{l}
hx^n + kx^{n-2} + px^{n-4} + qx^{n-6} + rx^{n-8} + \ldots \\
\quad + s(n-1)x^{n-2} + t(n-3)x^{n-4} + u(n-5)x^{n-6} + v(n-7)x^{n-8} + \ldots \\
+ hx^n + kx^{n-2} + px^{n-4} + qx^{n-6} + rx^{n-8} + \ldots \\
- 3Ax^n - 3Bx^{n-2} - 3Cx^{n-4} - 3Dx^{n-6} - 3Ex^{n-8} - \ldots
\end{array}\right\} \cos^2 x \\
& + \left\{\begin{array}{l}
3Ax^n + 3Bx^{n-2} + 3Cx^{n-4} + 3Dx^{n-6} + 3Ex^{n-8} + \ldots \\
+ Ax^n + Bx^{n-2} + Cx^{n-4} + Dx^{n-6} + Ex^{n-8} + \ldots \\
\quad + F(n-1)x^{n-2} + G(n-3)x^{n-4} + H(n-5)x^{n-6} + I(n-7)x^{n-8} + \ldots
\end{array}\right\} \cos^4 x \\
& + \left\{\begin{array}{l}
hnx^{n-1} + k(n-2)x^{n-3} + p(n-4)x^{n-5} + q(n-6)x^{n-7} + r(n-8)x^{n-9} + \ldots \\
- 2sx^{n-1} - 2tx^{n-3} - 2ux^{n-5} - 2vx^{n-7} - 2wx^{n-9} - \ldots
\end{array}\right\} \sin x \cos x \\
& + \left\{\begin{array}{l}
Anx^{n-1} + B(n-2)x^{n-3} + C(n-4)x^{n-5} + D(n-6)x^{n-7} + E(n-8)x^{n-9} + \ldots \\
- 4Fx^{n-1} - 4Gx^{n-3} - 4Hx^{n-5} - 4Ix^{n-7} - 4Kx^{n-9} - \ldots
\end{array}\right\} \sin x \cos^3 x
\end{aligned}
$$

Es ergeben sich daher folgende Bestimmungsgleichungen:

1) $4Ax^n \cdot \cos^4 x = x^n \cdot \cos^4 x$, daher $A = \frac{1}{4}$

2) $2h - 3A = 0$ oder $h = \frac{3}{2} A$, daher $h = \left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{8}$.

3) $An - 4F = 0$ oder $F = A\left(\frac{n}{4}\right)$ daher $F = \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{n}{4}\right)$

4) $4B + F(n-1) = 0$ oder $B = -F\left(\frac{n-1}{4}\right)$ daher $B = -\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{n}{4}\right)\left(\frac{n-1}{4}\right)$

5) $B(n-2) - 4G = 0$ oder $G = B\left(\frac{n-2}{4}\right)$ daher $G = -\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{n}{4}\right)\left(\frac{n-1}{4}\right)\left(\frac{n-2}{4}\right)$

6) $4C + G(n-3) = 0$ oder $C = -G\left(\frac{n-3}{4}\right)$ daher $C = +\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{n}{4}\right)\left(\frac{n-1}{4}\right)\left(\frac{n-2}{4}\right)\left(\frac{n-3}{4}\right)$

7) $C(n-4) - 4H = 0$ oder $H = C\left(\frac{n-4}{4}\right)$ daher $H = +\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{n}{4}\right)\left(\frac{n-1}{4}\right)\left(\frac{n-2}{4}\right)\left(\frac{n-3}{4}\right)\left(\frac{n-4}{4}\right)$

8) $4D + H(n-5) = 0$ oder $D = -H\left(\frac{n-5}{4}\right)$ daher $D = -\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{n}{4}\right)\left(\frac{n-1}{4}\right)\left(\frac{n-2}{4}\right)\left(\frac{n-3}{4}\right)\left(\frac{n-4}{4}\right)\left(\frac{n-5}{4}\right)$

9) $D(n-6) - 4I = 0$ oder $I = D\left(\frac{n-6}{4}\right)$ daher $I = -\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{n}{4}\right)\left(\frac{n-1}{4}\right)\left(\frac{n-2}{4}\right)\left(\frac{n-3}{4}\right)\left(\frac{n-4}{4}\right)\left(\frac{n-5}{4}\right)\left(\frac{n-6}{4}\right)$

10) $4E + I(n-7) = 0$ oder $E = -I\left(\frac{n-7}{4}\right)$ daher $E = +\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{n}{4}\right)\left(\frac{n-1}{4}\right)\left(\frac{n-2}{4}\right)\left(\frac{n-3}{4}\right)\left(\frac{n-4}{4}\right)\left(\frac{n-5}{4}\right)\left(\frac{n-6}{4}\right)\left(\frac{n-7}{4}\right)$

11) $E(n-8) - 4K = 0$ oder $K = E.\left(\frac{n-8}{4}\right)$ daher $K = +\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{n}{4}\right)\left(\frac{n-1}{4}\right)\left(\frac{n-2}{4}\right)\left(\frac{n-3}{4}\right)\left(\frac{n-4}{4}\right)\left(\frac{n-5}{4}\right)\left(\frac{n-6}{4}\right)\left(\frac{n-7}{4}\right)\left(\frac{n-8}{4}\right)$

12) $hn - 2s = 0$ oder $s = h.\left(\frac{n}{2}\right)$ daher $s = \left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{n}{2}\right)$

13) $2k + s(n-1) - 3B = 0$ oder $k = \frac{3}{2} B - s\left(\frac{n-1}{2}\right)$

oder $k = -\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{n}{4}\right)\left(\frac{n-1}{4}\right) - \left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}\right) = -\left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 1\right) = -\left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}\right) \cdot \frac{5}{4}$ daher

$k = -\left(\frac{3}{8}\right) \cdot 5 \cdot \left(\frac{n}{4}\right)\left(\frac{n-1}{4}\right)$

14) $k(n-2) - 2t = 0$ oder $t = k\left(\frac{n-2}{2}\right)$ daher $t = -\left(\frac{3}{8}\right) \cdot 5 \cdot \left(\frac{n}{4}\right)\left(\frac{n-1}{4}\right)\left(\frac{n-2}{2}\right)$

15) $2p + t(n-3) - 3C = 0$ oder $p = \frac{3}{2} C - t\left(\frac{n-3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{n}{4}\right)\left(\frac{n-1}{4}\right)\left(\frac{n-2}{4}\right)\left(\frac{n-3}{4}\right) + \left(\frac{3}{8}\right) \cdot 5\left(\frac{n}{4}\right)\left(\frac{n-1}{4}\right)\left(\frac{n-2}{2}\right)\left(\frac{n-3}{2}\right)$

oder $p = \left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{n}{4}\right)\left(\frac{n-1}{4}\right)\left(\frac{n-2}{2}\right)\left(\frac{n-3}{2}\right)\left\{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 5\right\} = \left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{n}{4}\right)\left(\frac{n-1}{4}\right)\left(\frac{n-2}{2}\right)\left(\frac{n-3}{2}\right) \cdot \frac{21}{4}$ daher $p = \left(\frac{3}{8}\right) 21 \left(\frac{n}{4}\right)\left(\frac{n-1}{4}\right)\left(\frac{n-2}{4}\right)\left(\frac{n-3}{4}\right)$

16) $p(n-4) - 2u = 0$ oder $u = p\left(\frac{n-4}{2}\right)$ daher $u = \left(\frac{3}{8}\right) \cdot 21 \cdot \left(\frac{n}{4}\right)\left(\frac{n-1}{4}\right)\left(\frac{n-2}{4}\right)\left(\frac{n-3}{4}\right)\left(\frac{n-4}{2}\right)$

17) $2q + u(n-5) - 3D = 0$ oder $q = \frac{3}{2} D - u\left(\frac{n-5}{2}\right)$, also

$q = -\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{n}{4}\right)\left(\frac{n-1}{4}\right)\left(\frac{n-2}{4}\right)\left(\frac{n-3}{4}\right)\left(\frac{n-4}{4}\right)\left(\frac{n-5}{4}\right) - \left(\frac{3}{8}\right) \cdot 21 \cdot \left(\frac{n}{4}\right)\left(\frac{n-1}{4}\right)\left(\frac{n-2}{4}\right)\left(\frac{n-3}{4}\right)\left(\frac{n-4}{2}\right)\left(\frac{n-5}{2}\right)$

$= -\left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{n}{4}\right)\left(\frac{n-1}{4}\right)\left(\frac{n-2}{4}\right)\left(\frac{n-3}{4}\right)\left(\frac{n-4}{2}\right)\left(\frac{n-5}{2}\right)\left\{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 21\right\} = -\left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{n}{4}\right)\left(\frac{n-1}{4}\right)\left(\frac{n-2}{4}\right)\left(\frac{n-3}{4}\right)\left(\frac{n-4}{2}\right)\left(\frac{n-5}{2}\right) \cdot \frac{85}{4}$ daher

$q = -\left(\frac{3}{8}\right) \cdot 85 \cdot \left(\frac{n}{4}\right)\left(\frac{n-1}{4}\right)\left(\frac{n-2}{4}\right)\left(\frac{n-3}{4}\right)\left(\frac{n-4}{4}\right)\left(\frac{n-5}{4}\right)$

18) $q(n-6) - 2v = 0$ oder $v = q\left(\frac{n-6}{2}\right)$ daher $v = -\left(\frac{3}{8}\right) \cdot 85 \cdot \left(\frac{n}{4}\right)\left(\frac{n-1}{4}\right)\left(\frac{n-2}{4}\right)\left(\frac{n-3}{4}\right)\left(\frac{n-4}{4}\right)\left(\frac{n-5}{4}\right)\left(\frac{n-6}{2}\right)$

19) $2r + v(n-7) - 3E = 0$ oder $r = \frac{3}{2} E - v\left(\frac{n-7}{2}\right)$ oder

$r = \left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{n}{4}\right)\left(\frac{n-1}{4}\right)\left(\frac{n-2}{4}\right)\left(\frac{n-3}{4}\right)\left(\frac{n-4}{4}\right)\left(\frac{n-5}{4}\right)\left(\frac{n-6}{4}\right)\left(\frac{n-7}{4}\right) + \left(\frac{3}{8}\right) \cdot 85 \cdot \left(\frac{n}{4}\right)\left(\frac{n-1}{4}\right)\left(\frac{n-2}{4}\right)\left(\frac{n-3}{4}\right)\left(\frac{n-4}{4}\right)\left(\frac{n-5}{4}\right)\left(\frac{n-6}{2}\right)\left(\frac{n-7}{2}\right)$

$= \left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{n}{4}\right)\left(\frac{n-1}{4}\right)\left(\frac{n-2}{4}\right)\left(\frac{n-3}{4}\right)\left(\frac{n-4}{4}\right)\left(\frac{n-5}{4}\right)\left(\frac{n-6}{2}\right)\left(\frac{n-7}{2}\right)\left\{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 85\right\}$

$= \left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{n}{4}\right)\left(\frac{n-1}{4}\right)\left(\frac{n-2}{4}\right)\left(\frac{n-3}{4}\right)\left(\frac{n-4}{4}\right)\left(\frac{n-5}{4}\right)\left(\frac{n-6}{2}\right)\left(\frac{n-7}{2}\right) \cdot \frac{341}{4}$ folglich

$r = \left(\frac{3}{8}\right) \cdot 341 \cdot \left(\frac{n}{4}\right)\left(\frac{n-1}{4}\right)\left(\frac{n-2}{4}\right)\left(\frac{n-3}{4}\right)\left(\frac{n-4}{4}\right)\left(\frac{n-5}{4}\right)\left(\frac{n-6}{4}\right)\left(\frac{n-7}{4}\right)$

20) $r(n-8) - 2w = o$ oder $w = r\left(\frac{n-8}{2}\right) = \left(\frac{3}{8}\right)\cdot 343\cdot\left(\frac{n}{4}\right)\left(\frac{n-1}{4}\right)\left(\frac{n-2}{4}\right)\left(\frac{n-3}{4}\right)\left(\frac{n-4}{4}\right)\left(\frac{n-5}{4}\right)\left(\frac{n-6}{4}\right)\left(\frac{n-7}{4}\right)\left(\frac{n-8}{2}\right)$

21) $a(n+1) - h = o$ oder $a = \frac{h}{n+1}$ daher $a = \frac{3}{8(n+1)}$

22) $b(n-1) - k = o$ oder $b = \frac{k}{n-1}$ daher $b = -\left(\frac{3}{8}\right)\cdot 5\cdot\left(\frac{n}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right) = -\left(\frac{3}{32}\right)\cdot 5\cdot\left(\frac{n}{4}\right)$

23) $c(n-3) - p = o$ oder $c = \frac{p}{n-3}$ daher $c = \left(\frac{3}{8}\right)\cdot 21\cdot\left(\frac{n}{4}\right)\left(\frac{n-1}{4}\right)\left(\frac{n-2}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{3}{32}\right)(21)\left(\frac{n}{4}\right)\left(\frac{n-1}{4}\right)\left(\frac{n-2}{4}\right)$

24) $f(n-5) - q = o$ oder $f = \frac{q}{n-5} = -\left(\frac{3}{8}\right)85\cdot\left(\frac{n}{4}\right)\left(\frac{n-1}{4}\right)\left(\frac{n-2}{4}\right)\left(\frac{n-3}{4}\right)\left(\frac{n-4}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right) = -\left(\frac{3}{32}\right)85\cdot\left(\frac{n}{4}\right)\left(\frac{n-1}{4}\right)\left(\frac{n-2}{4}\right)\left(\frac{n-3}{4}\right)\left(\frac{n-4}{4}\right)$

25) $g(n-7)-r=o$ oder $g=\frac{r}{n-7}=\left(\frac{3}{8}\right)343\cdot\left(\frac{n}{4}\right)\left(\frac{n-1}{4}\right)\left(\frac{n-2}{4}\right)\left(\frac{n-3}{4}\right)\left(\frac{n-4}{4}\right)\left(\frac{n-5}{4}\right)\left(\frac{n-6}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)=\left(\frac{3}{32}\right)343\cdot\left(\frac{n}{4}\right)\left(\frac{n-1}{4}\right)\left(\frac{n-2}{4}\right)\left(\frac{n-3}{4}\right)\left(\frac{n-4}{4}\right)\left(\frac{n-5}{4}\right)\left(\frac{n-6}{4}\right)$

Es entsteht daher folgendes Integral

$$\int x^n . \cos^4 x . dx = \Big\{\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{n}{4}\right) x^{n-1} - \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{n}{4}\right)\left(\frac{n-1}{4}\right)\left(\frac{n-2}{4}\right) x^{n-3} + \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{n}{4}\right)\left(\frac{n-1}{4}\right)\left(\frac{n-2}{4}\right)\left(\frac{n-3}{4}\right)\left(\frac{n-4}{4}\right) x^{n-5}$$

$$- \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{n}{4}\right)\left(\frac{n-1}{4}\right)\left(\frac{n-2}{4}\right)\left(\frac{n-3}{4}\right)\left(\frac{n-4}{4}\right)\left(\frac{n-5}{4}\right)\left(\frac{n-6}{4}\right) x^{n-7} + \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{n}{4}\right)\left(\frac{n-1}{4}\right)\left(\frac{n-2}{4}\right)\left(\frac{n-3}{4}\right)\left(\frac{n-4}{4}\right)\left(\frac{n-5}{4}\right)\left(\frac{n-6}{4}\right)\left(\frac{n-7}{4}\right)\left(\frac{n-8}{4}\right) x^{n-9} - \ldots\Big\} \cos^4 x$$

$$+ \Big\{\left(\frac{1}{4}\right) x^n - \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{n}{4}\right)\left(\frac{n-1}{4}\right) x^{n-2} + \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{n}{4}\right)\left(\frac{n-1}{4}\right)\left(\frac{n-2}{4}\right)\left(\frac{n-3}{4}\right) x^{n-4} - \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{n}{4}\right)\left(\frac{n-1}{4}\right)\left(\frac{n-2}{4}\right)\left(\frac{n-3}{4}\right)\left(\frac{n-4}{4}\right)\left(\frac{n-5}{4}\right) x^{n-6}$$

$$+ \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{n}{4}\right)\left(\frac{n-1}{4}\right)\left(\frac{n-2}{4}\right)\left(\frac{n-3}{4}\right)\left(\frac{n-4}{4}\right)\left(\frac{n-5}{4}\right)\left(\frac{n-6}{4}\right)\left(\frac{n-7}{4}\right) x^{n-8} - \ldots\Big\} \cos^3 x . \sin x$$

$$+ \Big\{\left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{n}{2}\right) x^{n-1} - \left(\frac{3}{8}\right)\cdot 5\cdot\left(\frac{n}{4}\right)\left(\frac{n-1}{4}\right)\left(\frac{n-2}{2}\right) x^{n-3} + \left(\frac{3}{8}\right)\cdot 23\cdot\left(\frac{n}{4}\right)\left(\frac{n-1}{4}\right)\left(\frac{n-2}{4}\right)\left(\frac{n-3}{4}\right)\left(\frac{n-4}{2}\right) x^{n-5}$$

$$- \left(\frac{3}{8}\right)\cdot 85\cdot\left(\frac{n}{4}\right)\left(\frac{n-1}{4}\right)\left(\frac{n-2}{4}\right)\left(\frac{n-3}{4}\right)\left(\frac{n-4}{4}\right)\left(\frac{n-5}{4}\right)\left(\frac{n-6}{2}\right) x^{n-7} + \left(\frac{3}{8}\right)(341)\left(\frac{n}{4}\right)\left(\frac{n-1}{4}\right)\left(\frac{n-2}{4}\right)\left(\frac{n-3}{4}\right)\left(\frac{n-4}{4}\right)\left(\frac{n-5}{4}\right)\left(\frac{n-6}{4}\right)\left(\frac{n-7}{4}\right)\left(\frac{n-8}{2}\right) x^{n-9} - ..\Big\} \cos^2 x$$

$$+ \Big\{\left(\frac{3}{8}\right) x^n - \left(\frac{3}{8}\right)\cdot 5\cdot\left(\frac{n}{4}\right)\left(\frac{n-1}{4}\right) x^{n-2} + \left(\frac{3}{8}\right)\cdot 23\cdot\left(\frac{n}{4}\right)\left(\frac{n-1}{4}\right)\left(\frac{n-2}{4}\right)\left(\frac{n-3}{4}\right) x^{n-4} - \left(\frac{3}{8}\right)85\cdot\left(\frac{n}{4}\right)\left(\frac{n-1}{4}\right)\left(\frac{n-2}{4}\right)\left(\frac{n-3}{4}\right)\left(\frac{n-4}{4}\right)\left(\frac{n-5}{4}\right) x^{n-6}$$

$$+ \left(\frac{3}{8}\right)343\cdot\left(\frac{n}{4}\right)\left(\frac{n-1}{4}\right)\left(\frac{n-2}{4}\right)\left(\frac{n-3}{4}\right)\left(\frac{n-4}{4}\right)\left(\frac{n-5}{4}\right)\left(\frac{n-6}{4}\right)\left(\frac{n-7}{4}\right) x^{n-8} - \ldots\Big\} \sin x \cos x$$

$$+ \frac{3x^{n+1}}{8(n+1)} - \left(\frac{3}{32}\right)\cdot 5\cdot\left(\frac{n}{4}\right) x^{n-1} + \left(\frac{3}{32}\right)\cdot 23\cdot\left(\frac{n}{4}\right)\left(\frac{n-1}{4}\right)\left(\frac{n-2}{4}\right) x^{n-3} - \left(\frac{3}{32}\right)85\cdot\left(\frac{n}{4}\right)\left(\frac{n-1}{4}\right)\left(\frac{n-2}{4}\right)\left(\frac{n-3}{4}\right)\left(\frac{n-4}{4}\right) x^{n-5}$$

$$+ \left(\frac{3}{32}\right)\cdot 341\cdot\left(\frac{n}{4}\right)\left(\frac{n-1}{4}\right)\left(\frac{n-2}{4}\right)\left(\frac{n-3}{4}\right)\left(\frac{n-4}{4}\right)\left(\frac{n-5}{4}\right)\left(\frac{n-6}{4}\right) x^{n-7} - \ldots\ldots + C$$

oder, wenn ich das Integral noch etwas vereinfache, so entsteht:

$$\int x^n . \cos^4 x . dx = \frac{n}{16}\Big\{x^{n-1} - \left(\frac{n-1}{4}\right)\left(\frac{n-2}{4}\right) x^{n-3} + \left(\frac{n-1}{4}\right)\left(\frac{n-2}{4}\right)\left(\frac{n-3}{4}\right)\left(\frac{n-4}{4}\right) x^{n-5} - \left(\frac{n-1}{4}\right)\left(\frac{n-2}{4}\right)\left(\frac{n-3}{4}\right)\left(\frac{n-4}{4}\right)\left(\frac{n-5}{4}\right)\left(\frac{n-6}{4}\right) x^{n-7} + \ldots\Big\} \cos^4 x$$

$$+ \frac{1}{4}\Big\{x^n - \left(\frac{n}{4}\right)\left(\frac{n-1}{4}\right) x^{n-2} + \left(\frac{n}{4}\right)\left(\frac{n-1}{4}\right)\left(\frac{n-2}{4}\right)\left(\frac{n-3}{4}\right) x^{n-4} - \left(\frac{n}{4}\right)\left(\frac{n-1}{4}\right)\left(\frac{n-2}{4}\right)\left(\frac{n-3}{4}\right)\left(\frac{n-4}{4}\right)\left(\frac{n-5}{4}\right) x^{n-6} + \ldots\Big\} \cos^3 x \sin x$$

$$+ \frac{3}{16} n \Big\{x^{n-1} - 5\cdot\left(\frac{n-1}{4}\right)\left(\frac{n-2}{4}\right) x^{n-3} + 23.\left(\frac{n-1}{4}\right)\left(\frac{n-2}{4}\right)\left(\frac{n-3}{4}\right)\left(\frac{n-4}{4}\right) x^{n-5} - 85.\left(\frac{n-1}{4}\right)\left(\frac{n-2}{4}\right)\left(\frac{n-3}{4}\right)\left(\frac{n-4}{4}\right)\left(\frac{n-5}{4}\right)\left(\frac{n-6}{4}\right) x^{n-7}$$

$$+ 341.\left(\frac{n-1}{4}\right)\left(\frac{n-2}{4}\right)\left(\frac{n-3}{4}\right)\left(\frac{n-4}{4}\right)\left(\frac{n-5}{4}\right)\left(\frac{n-6}{4}\right)\left(\frac{n-7}{4}\right)\left(\frac{n-8}{4}\right) x^{n-9} - \ldots\Big\} \cos^2 x + \frac{3}{8}\Big\{x^n - 5\cdot\left(\frac{n}{4}\right)\left(\frac{n-1}{4}\right) x^{n-2}$$

$$+ 23.\left(\frac{n}{4}\right)\left(\frac{n-1}{4}\right)\left(\frac{n-2}{4}\right)\left(\frac{n-3}{4}\right) x^{n-4} - 85.\left(\frac{n}{4}\right)\left(\frac{n-1}{4}\right)\left(\frac{n-2}{4}\right)\left(\frac{n-3}{4}\right)\left(\frac{n-4}{4}\right)\left(\frac{n-5}{4}\right) x^{n-6} + 343.\left(\frac{n}{4}\right)\left(\frac{n-1}{4}\right)\left(\frac{n-2}{4}\right)\left(\frac{n-3}{4}\right)\left(\frac{n-4}{4}\right)\left(\frac{n-5}{4}\right)\left(\frac{n-6}{4}\right)\left(\frac{n-7}{4}\right) x^{n-8}$$

$$- \ldots\Big\} \cos x \sin x + \frac{3x^{n+1}}{8(n+1)} - \frac{3n}{128}\Big\{5x^{n-1} - 23.\left(\frac{n-1}{4}\right)\left(\frac{n-2}{4}\right) x^{n-3} + 85.\left(\frac{n-1}{4}\right)\left(\frac{n-2}{4}\right)\left(\frac{n-3}{4}\right)\left(\frac{n-4}{4}\right) x^{n-5}$$

$$- 341.\left(\frac{n-1}{4}\right)\left(\frac{n-2}{4}\right)\left(\frac{n-3}{4}\right)\left(\frac{n-4}{4}\right)\left(\frac{n-5}{4}\right)\left(\frac{n-6}{4}\right) x^{n-7} + \ldots\Big\} + C.$$

Es bleibt nur noch zu bemerken, dass die Factoren 5, 21, 85, 341 u. s. w., wie sich aus der Bestimmung der Coefficienten ergiebt, derart entstanden sind, dass jede folgende Ziffer das Vierfache der vorhergehenden ist, plus 1, sodass sie sich also mit 1365, 5461, 21845, 87381, 349525 u. s. w. fortsetzen würden. Es ist ferner:

$\int x^n . \cos^4 x . dx = \int x^n . \left(1 - \sin^2 x\right)^2 . dx = \int x^n \left(1 - 2 \sin^2 x + \sin^4 x\right) dx$ oder

$\int x^n . \cos^4 x . dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} - 2 \int x^n . \sin^2 x . dx + \int x^n . \sin^4 x . dx$, und man kann daher hieraus leicht $\int x^n . \sin^4 x . dx$ bestimmen.

§. 10.

Vermöge der Reductionsformel des §. 8 bin ich also im Stande, das $\int x^n . \cos^m x . dx$ für immer grössere Werthe des m zu entwickeln; nur bin ich bei diesem Verfahren genöthigt, stets nur Schritt vor Schritt vorwärts zu gehn. Um z. B. $\int x^n . \cos^9 x . dx$ zu erhalten, muss mir zunächst $\int x^n . \cos^7 x\, dx$ bekannt sein; es wäre also zweckmässig, sich nach einer grösseren Verallgemeinerung des $\int x^n . \cos^m x . dx$ umzuschauen. Unter den bereits vorhandenen Integralen bieten sich mir folgende Anhaltspunkte zu diesem Behuf dar.

Beim $\int x^n . \cos^4 x . dx$ beginnen die trigonometrischen Factoren, welche in dem entwickelten Integral die Summen multipliciren, mit $\cos^4 x$; beim $\int x^n . \cos^3 x\, dx$ mit $\cos^3 x$, beim $\int x^n . \cos^2 x . dx$ mit $\cos^2 x$, und beim $\int x^n . \cos x\, dx$ mit $\cos x$; sie setzen sich demnächst bezüglich mit $\cos^3 x \sin x$, $\cos^2 x \sin x$ und mit $\sin x$ fort; und dann mit $\cos^2 x$; $\cos x$; es ist daher zu erwarten, dass bei dem $\int x^n . \cos^m x . dx$ die trigonometrischen Factoren mit $\cos^m x$ beginnen und sich mit $\cos^{m-1} x . \sin x$, $\cos^{m-2} x$, $\cos^{m-3} x . \sin x$, $\cos^{m-4} x$ u. s. w. fortsetzen werden. Die ausserhalb der Summen befindlichen Coëfficienten lauten sodann: beim $\int x^n . \cos^4 x\, dx$ derjenige, welcher $\cos^4 x$ multiplicirt, $\frac{n}{16}$; beim $\int x^n . \cos^3 x\, dx$ derjenige, welcher $\cos^3 x$ multiplicirt, $\frac{n}{9}$; beim $\int x^n . \cos^2 x\, dx$ der, welcher $\cos^2 x$ multiplicirt, $\frac{n}{4}$; sowie beim $\int x^n . \cos x . dx$ derjenige, welcher $\cos x$ multiplicirt, $\frac{n}{1}$. Beim $\int x^n . \cos^m x . dx$ wird daher der Coëfficient, welcher $\cos^m x$ multiplicirt, möglicherweise $\frac{n}{m^2}$ lauten. Die ausserhalb der Summen befindlichen Coëfficienten, welche ferner beim $\int x^n . \cos^4 x\, dx$ das Product $\cos^3 x \sin x$, beim $\int x^n . \cos^3 x\, dx$ das Product $\cos^2 x . \sin x$, beim $\int x^n . \cos^2 x . dx$ das Product $\cos x \sin x$, und beim $\int x^n . \cos x\, dx$ das $\sin x$ multipliciren, sind bezüglich $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, und $\frac{1}{1}$; der Coëfficient, welcher beim $\int x^n . \cos^m x . dx$ den Factor $\cos^{m-1} x \sin x$ multiplicirt, wird daher möglicherweise $\frac{1}{m}$ sein.

Die Potenzen von x, welche mit $\cos^m x$ multiplicirt sind, beginnen mit dem Exponenten $n-1$, die Potenzen aber, welche mit $\cos^{m-1} x . \sin x$ multiplicirt sind, beginnen mit dem Exponenten n; alle Potenzen von x sind mit abwechselnden Vorzeichen versehn und fallen stets um 2 Grad.

Es möge daher sein

$$\int x^n \cdot \cos^m x \cdot dx = \frac{n}{m^2} \cos^m x \Big\{ x^{n-1} - \frac{(n-1)(n-2)}{m^2} x^{n-3} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{m^4} x^{n-5} - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}{m^6} x^{n-7}$$

$$+ \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{m^8} x^{n-9} - \ldots\ldots \Big\}$$

$$+ \frac{1}{m} \cos^{m-1} x \cdot \sin x \Big\{ x^n - \frac{n(n-1)}{m^2} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{m^4} x^{n-4} - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{m^6} x^{n-6}$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)}{m^8} x^{n-8} - \ldots\ldots \Big\}$$

$$+ a \cos^{m-2} x \Big\{ x^{n-1} - A x^{n-3} + B x^{n-5} - C x^{n-7} + D x^{n-9} - \ldots\ldots \Big\}$$

$$+ b \cos^{m-3} x \cdot \sin x \Big\{ x^n - H x^{n-2} + I x^{n-4} - K x^{n-6} + L x^{n-8} - \ldots\ldots \Big\}$$

$$+ c \cos^{m-4} x \Big\{ x^{n-1} - P x^{n-3} + Q x^{n-5} - R x^{n-7} + \ldots\ldots \Big\}$$

$$+ f \cos^{m-5} x \cdot \sin x \Big\{ x^n - \mathfrak{a} x^{n-2} + \mathfrak{b} x^{n-4} - \mathfrak{c} x^{n-6} + \ldots\ldots \Big\}.$$

$$+ g \cos^{m-6} x \Big\{ x^{n-1} - \mathfrak{h} x^{n-3} + \ldots\ldots \Big\}$$

$$+ h \cos^{m-7} x \sin x \Big\{ x^n - \mathfrak{p} x^{n-2} + \ldots\ldots \Big\}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + C;$$

dann erhalte ich durch Differenziation dieser Gleichung folgende andere:

$$x^n \cdot \cos^m x = \frac{n}{m^2} \cos^m x \Big\{ (n-1) x^{n-2} - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{m^2} x^{n-4} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{m^4} x^{n-6} - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)}{m^6} x^{n-8} + \ldots \Big\}$$

$$- \frac{n}{m} \cos^{m-1} x \cdot \sin x \Big\{ x^{n-1} - \frac{(n-1)(n-2)}{m^2} x^{n-3} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{m^4} x^{n-5} - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}{m^6} x^{n-7} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{m^8} x^{n-9} - \ldots \Big\}$$

$$+ \frac{1}{m} \cos^{m-1} x \cdot \sin x \Big\{ n x^{n-1} - \frac{n(n-1)(n-2)}{m^2} x^{n-3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{m^4} x^{n-5} - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}{m^6} x^{n-7} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{m^8} x^{n-9} - \ldots \Big\}$$

$$+ \frac{1}{m} \cos^m x \Big\{ x^n - \frac{n(n-1)}{m^2} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{m^4} x^{n-4} - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{m^6} x^{n-6} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)}{m^8} x^{n-8} - \ldots \Big\}$$

$$- \left(\frac{m-1}{m}\right) \sin^2 x \cdot \cos^{m-2} x \Big\{ x^n - \frac{n(n-1)}{m^2} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{m^4} x^{n-4} - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{m^6} x^{n-6} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)}{m^8} x^{n-8} - \ldots \Big\}$$

$$+ a \cos^{m-2} x \Big\{ (n-1) x^{n-2} - A(n-3) x^{n-4} + B(n-5) x^{n-6} - C(n-7) x^{n-8} + \ldots \Big\}$$

$$- a(m-2) \cos^{m-3} x \cdot \sin x \Big\{ x^{n-1} - A x^{n-3} + B x^{n-5} - C x^{n-7} + D x^{n-9} - \ldots \Big\}$$

$$+ b \cdot \cos^{m-3} x \cdot \sin x \Big\{ n x^{n-1} - H(n-2) x^{n-3} + I(n-4) x^{n-5} - K(n-6) x^{n-7} + L(n-8) x^{n-9} - \ldots \Big\}$$

$$+ b \cdot \cos^{m-2} x \Big\{ x^n - H x^{n-2} + I x^{n-4} - K x^{n-6} + L x^{n-8} - \ldots \Big\}$$

$$- b(m-3) \cos^{m-4} x \cdot \sin^2 x \Big\{ x^n - H x^{n-2} + I x^{n-4} - K x^{n-6} + L x^{n-8} - \ldots \Big\}$$

$$+ c \cdot \cos^{m-4} x \Big\{ (n-1) x^{n-2} - P(n-3) x^{n-4} + Q(n-5) x^{n-6} - R(n-7) x^{n-8} + \ldots \Big\}$$

$$- c(m-4) \cos^{m-5} x \cdot \sin x \Big\{ x^{n-1} - P x^{n-3} + Q x^{n-5} - R x^{n-7} + \ldots \Big\}$$

$$+ f \cos^{m-5} x \cdot \sin x \Big\{ n x^{n-1} - \mathfrak{a}(n-2) x^{n-3} + \mathfrak{b}(n-4) x^{n-5} - \mathfrak{c}(n-6) x^{n-7} + \ldots \Big\}$$

$$+ f \cos^{m-4} x \Big\{ x^n - \mathfrak{a} x^{n-2} + \mathfrak{b} x^{n-4} - \mathfrak{c} x^{n-6} + \ldots \Big\}$$

$$+ g \cos^{m-6} x \left\{ (n-1) x^{n-2} - \mathfrak{b}(n-3) x^{n-4} + \ldots \right\} - g(m-6) \cos^{m-7} x \sin x \left\{ x^{n-1} - \mathfrak{b} x^{n-3} + \ldots \right\}$$

$$+ h \cos^{m-7} x \sin x \left\{ n x^{n-1} - \mathfrak{p}(n-2) x^{n-3} + \ldots \right\} + h \cos^{m-6} x \left\{ x^{n} - \mathfrak{p} x^{n-2} + \ldots \right\} - h(m-7) \sin^2 x \cos^{m-8} x \left\{ x^{n} - \mathfrak{p} x^{n-2} + \ldots \right\}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Diese Gleichung, mit Berücksichtigung, dass $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, geordnet, ergiebt $x^n . \cos^m x =$

$$\cos^m x \left\{ \begin{array}{l} \qquad\qquad \frac{n(n-1)}{m^2} x^{n-2} - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{m^4} x^{n-4} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{m^6} x^{n-6} - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)}{m^8} x^{n-8} + \ldots \\ + \frac{1}{m} x^{n} - \frac{n(n-1)}{m^3} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{m^5} x^{n-4} - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{m^7} x^{n-6} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)}{m^9} x^{n-8} - \ldots \\ + \left(\frac{m-1}{m}\right) x^{n} - \frac{(m-1)n(n-1)}{m^3} x^{n-2} + \frac{(m-1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{m^5} x^{n-4} - \frac{(m-1)n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{m^7} x^{n-6} + \frac{(m-1)n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)}{m^9} x^{n-8} - \ldots \end{array} \right\}$$

$$+ \cos^{m-1} x . \sin x \left\{ \begin{array}{l} \quad \frac{n}{m} x^{n-1} - \frac{n(n-1)(n-2)}{m^3} x^{n-3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{m^5} x^{n-5} - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}{m^7} x^{n-7} + \ldots \\ - \frac{n}{m} x^{n-1} + \frac{n(n-1)(n-2)}{m^3} x^{n-3} - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{m^5} x^{n-5} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}{m^7} x^{n-7} + \ldots \end{array} \right\}$$

$$+ \cos^{m-2} x \left\{ \begin{array}{l} - \left(\frac{m-1}{m}\right) x^{n} + \frac{(m-1)n(n-1)}{m^3} x^{n-2} - \frac{(m-1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{m^5} x^{n-4} + \frac{(m-1)n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{m^7} x^{n-6} \\ \qquad\qquad + a(n-1) x^{n-2} \qquad - aA(n-3) x^{n-4} \qquad\qquad + aB(n-5) x^{n-6} \\ \quad + b x^{n} \quad - b H x^{n-2} \qquad\qquad + b I x^{n-4} \qquad\qquad - b K x^{n-6} \\ + b(m-3) x^{n} - b(m-3) H x^{n-2} \quad + b(m-3) I x^{n-4} \qquad\qquad - b(m-3) K x^{n-6} \\ - \frac{(m-1)n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)}{m^9} x^{n-8} + \ldots\ldots \\ \qquad\qquad - a C(n-7) x^{n-8} + \ldots\ldots \\ \qquad\qquad\quad + b L x^{n-8} - \ldots\ldots \\ \qquad\qquad + b(m-3) L x^{n-8} - \ldots\ldots \end{array} \right\}$$

$$+ \cos^{m-3} x . \sin x \left\{ \begin{array}{l} \qquad b n x^{n-1} - bH(n-2) x^{n-3} + bI(n-4) x^{n-5} - bK(n-6) x^{n-7} + bL(n-8) x^{n-9} - \ldots\ldots \\ - a(m-2) x^{n-1} + aA(m-2) x^{n-3} - aB(m-2) x^{n-5} + aC(m-2) x^{n-7} - aD(m-2) x^{n-9} + \ldots\ldots \end{array} \right\}$$

$$+ \cos^{m-4} x \left\{ \begin{array}{l} - b(m-3) x^{n} + b(m-3) H x^{n-2} - b(m-3) I x^{n-4} + b(m-3) K x^{n-6} - \ldots\ldots \\ \qquad\qquad + c(n-1) x^{n-2} - cP(n-3) x^{n-4} + cQ(n-5) x^{n-6} - \ldots\ldots \\ \quad + f x^{n} \qquad - f\mathfrak{a} x^{n-2} \qquad + f\mathfrak{b} x^{n-4} \qquad - f\mathfrak{c} x^{n-6} + \ldots\ldots \\ + f(m-5) x^{n} - f(m-5)\mathfrak{a} x^{n-2} + f(m-5)\mathfrak{b} x^{n-4} - f(m-5)\mathfrak{c} x^{n-6} + \ldots\ldots \end{array} \right\}$$

$$+ \cos^{m-5} x . \sin x \left\{ \begin{array}{l} \qquad f n x^{n-1} - f\mathfrak{a}(n-2) x^{n-3} + f\mathfrak{b}(n-4) x^{n-5} - \ldots\ldots \\ - c(m-4) x^{n-1} + cP(m-4) x^{n-3} - cQ(m-4) x^{n-5} + \ldots\ldots \end{array} \right\}$$

$$+\cos^{m-6}x\left\{\begin{array}{l} -f(m-5)\,x^{n} + f(m-5)\mathfrak{a}\,x^{n-2} - \ldots\ldots \\ \qquad\qquad + g(n-1)\,x^{n-2} - \ldots\ldots \\ \quad + h\,x^{n} \quad - h\mathfrak{p}\,x^{n-2} + \ldots\ldots \\ + h(m-7)\,x^{n} - h(m-7)\mathfrak{p}\,x^{n-2} + \ldots\ldots \end{array}\right\} + \cos^{m-7}x\,\sin x\left\{\begin{array}{l} \qquad h\,n\,x^{n-1} - h\mathfrak{p}(n-2)\,x^{n-3} + \ldots\ldots \\ -g(m-6)\,x^{n-1} + g(m-6)\mathfrak{b}x^{n-3} - \ldots\ldots \end{array}\right\}$$

$$+\cos^{m-8}x\left\{-h(m-7)\,x^{n} + h(m-7)\mathfrak{p}\,x^{n-2} - \ldots\ldots\right\} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Es ergeben sich deshalb zur Auffindung der Coëfficienten folgende Bestimmungen:

1) $b + b(m-3) - \left(\frac{m-1}{m}\right) = o$ oder $b(m-2) = \frac{m-1}{m}$ daher $b = \frac{m-1}{m(m-2)}$

2) $bn - a(m-2) = o$ oder $a = b\left(\frac{n}{m-2}\right)$ daher $a = \frac{n(m-1)}{m(m-2)^2}$

3) $\frac{(m-1)n(n-1)}{m^3} + a(n-1) - bH - b(m-3)H = o$ oder $+H\{b + b(m-3)\} = a(n-1) + \frac{(m-1)n(n-1)}{m^3}$

oder $Hb(m-2) = \frac{n(m-1)(n-1)}{m(m-2)^2} + \frac{(m-1)n(n-1)}{m^3} = H\left(\frac{m-1}{m}\right)$ folglich $H = \frac{n(n-1)}{(m-2)^2} + \frac{n(n-1)}{m^2}$ oder

$H = n(n-1)\left\{\frac{1}{(m-2)^2} + \frac{1}{m^2}\right\}$ daher $H = \frac{n(n-1)\{m^2+(m-2)^2\}}{m^2(m-2)^2}$

4) $aA(m-2) - bH(n-2) = o$ oder $A = \frac{b(n-2)H}{a(m-2)} = \dfrac{\frac{(m-1)}{m(m-2)}\cdot(n-2)\cdot\frac{n(n-1)\{m^2+(m-2)^2\}}{m^2(m-2)^2}}{\frac{n(m-1)}{m(m-2)}}$ oder

$A = \dfrac{\frac{(m-1)(n-2)n(n-1)\{m^2+(m-2)^2\}}{m^3(m-2)^3}}{\frac{n(m-1)}{m(m-2)}}$ daher $A = \frac{(n-1)(n-2)\{m^2+(m-2)^2\}}{m^2(m-2)^2}$

5) $-\frac{(m-1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{m^5} - aA(n-3) + bI + b(m-3)I = o$ oder

$Ib(m-2) = aA(n-3) + \frac{(m-1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{m^5}$ oder $I = \dfrac{aA(n-3) + \frac{(m-1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{m^5}}{b(m-2)}$ oder

$I = \dfrac{\frac{n(m-1)}{m(m-2)^2}\cdot\frac{(n-1)(n-2)\{m^2+(m-2)^2\}(n-3)}{m^2(m-2)^2} + \frac{(m-1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{m^5}}{\frac{m-1}{m}}$

$= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\{m^2+(m-2)^2\}}{m^2(m-2)^4} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{m^4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{m^2}\left\{\frac{m^2+(m-2)^2}{(m-2)^4} + \frac{1}{m^2}\right\}$ daher

$I = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\{m^4+m^2(m-2)^2+(m-2)^4\}}{m^4(m-2)^4}$

6) $bI(n-4) - aB(m-2) = o$ oder $B = \frac{Ib(n-4)}{a(m-2)} = \dfrac{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\{m^4+m^2(m-2)^2+(m-2)^4\}}{m^4(m-2)^4}\cdot\frac{(m-1)(n-4)}{m(m-2)}}{\frac{n(m-1)}{m(m-2)}}$ daher

$B = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\{m^4+m^2(m-2)^2+(m-2)^4\}}{m^4(m-2)^4}$

7) $\frac{(m-1)n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{m^7} + aB(n-5) - bK - b(m-3)K = o$ oder

$Kb(m-2) = aB(n-5) + \frac{(m-1)n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{m^7}$ oder $K = \dfrac{aB(n-5) + \frac{(m-1)n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{m^7}}{b(m-2)}$

$K = \dfrac{\frac{n(m-1)}{m(m-2)^2}\cdot\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\{m^4+m^2(m-2)^2+(m-2)^4\}(n-5)}{m^4(m-2)^4} + \frac{(m-1)n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{m^7}}{\frac{m-1}{m}}$

$= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{m^4}\left\{\frac{m^4+m^2(m-2)^2+(m-2)^4}{(m-2)^6} + \frac{1}{m^2}\right\}$ folglich

$K = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)\{m^6+m^4(m-2)^2+m^2(m-2)^4+(m-2)^6\}}{m^6(m-2)^6}$

8) $aC(m-2) - bK(n-6) = o$ oder $C = \frac{Kb(n-6)}{n(m-2)}$ oder

$$C = \frac{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)\{m^6 + m^4(m-2)^2 + m^2(m-2)^4 + (m-2)^6\}}{m^6 \cdot (m-2)^6} \cdot \frac{(m-1)(n-6)}{m(m-2)}}{\frac{n(m-1)}{m(m-2)}} \text{ daher}$$

$$C = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)\{m^6 + m^4(m-2)^2 + m^2(m-2)^4 + (m-2)^6\}}{m^6 \cdot (m-2)^6}$$

9) $\frac{-(m-1)n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)}{m^8} - aC(n-7) + bL + b(m-3)L = o$ oder

$$L = \frac{aC(n-7) + \frac{(m-1)n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)}{m^8}}{b(m-2)}$$

$$= \frac{\frac{n(m-1)}{m(m-2)^2} \cdot \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)\{m^6 + m^4(m-2)^2 + m^2(m-2)^4 + (m-2)^6\}(n-7)}{m^6 \cdot (m-2)^6} + \frac{(m-1)n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)}{m^8}}{\frac{m-1}{m}}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)}{m^6}\left\{\frac{m^6 + m^4(m-2)^2 + m^2(m-2)^4 + (m-2)^6}{(m-2)^8} + \frac{1}{m^2}\right\} \text{ daher}$$

$$L = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)\{m^8 + m^6(m-2)^2 + m^4(m-2)^4 + m^2(m-2)^6 + (m-2)^8\}}{m^8 \cdot (m-2)^8}$$

10) $bL(n-8) - aD(m-2) = o$ oder $D = \frac{Lb(n-8)}{n(m-2)}$, folglich

$$D = \frac{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)\{m^8 + m^6(m-2)^2 + m^4(m-2)^4 + m^2(m-2)^6 + (m-2)^8\}}{m^8 \cdot (m-2)^8} \cdot \frac{(m-1)(n-8)}{m(m-2)}}{\frac{n(m-1)}{m(m-2)}}, \text{ daher}$$

$$D = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)\{m^8 + m^6(m-2)^2 + m^4(m-2)^4 + m^2(m-2)^6 + (m-2)^8\}}{m^8 (m-2)^8}$$

Es mag hiermit für die Coëfficienten der 3ten und 4ten Serie genug sein; es sind mir nunmehr a, A, B, C, D, sowie b, H, I, K, L bekannt. und kann ich auf die ferneren Coëfficienten dieser beiden Serien ohne Weiteres durch Analogie schliessen. So würde z. B. der auf D folgende Coëfficient also lauten:

$$\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)(n-10)\{m^{10} + m^8(m-2)^2 + m^6(m-2)^4 + m^4(m-2)^6 + m^2(m-2)^8 + (m-2)^{10}\}}{m^{10}(m-2)^{10}}$$

Die Coëfficienten der gleichen Potenzen von x in diesen beiden Serien — und, wie sich gleich nachher herausstellen wird, auch in allen übrigen je zwei und zwei Serien — sind einander gleich, nur mit dem Unterschiede, dass z. B. L mit $n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)$, dagegen D mit $(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)$ multiplicirt ist, und dass überhaupt die Coëfficienten mit diesen Factoren in der angedeuteten Weise abwechseln.

So klar aber das Fortschreiten der Factoren $(n-1)(n-2)$, $(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$, $(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)$ u. s. w. einerseits, und der Factoren $n(n-1)$, $n(n-1)(n-2)(n-3)$, $n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$ u. s. w. andrerseits in den beiden zusammengehörigen Serien ist, so bedarf es in Beziehung auf die quadratischen Summen, mit denen jene Factoren multiplicirt sind, noch eines Wortes. Die erste quadratische Summe, welche ich angetroffen habe, war in H enthalten und hiess $m^2 + (m-2)^2$. Nun ist $\{m^2 + (m-2)^2\}^2 = m^4 + 2m^2(m-2)^2 + (m-2)^4$. Die quadratische Summe des nächsten Coëfficienten I lautet aber nur $m^4 + m^2(m-2)^2 + (m-2)^4$; ich erhalte dieselbe also, indem ich von der quadratischen Summe des vorigen Coëfficienten H das unvollständige Quadrat bilde, nämlich das Quadrat mit Weglassung des Binomial-Coëfficienten 2. Sodann ist

$\{m^2 + (m-2)^2\}^3 = m^6 + 3m^4(m-2)^2 + 3m^2(m-2)^4 + (m-2)^6$. Die quadratische Summe in K lautet aber

$m^6 + m^4(m-2)^2 + m^2(m-2)^4 + (m-2)^6$; ich erhalte dieselbe also, indem ich von der quadratischen Summe $m^2 + (m-2)^2$ in H den unvollständigen Cubus nehme, unter welchem ich den Cubus mit Fortlassung der Binomialcoëfficienten verstehe. Endlich ist

$\left\{m^2 + (m-2)^2\right\}^4 = m^8 + 4m^6(m-2)^2 + 6m^4(m-2)^4 + 4m^2(m-2)^6 + (m-2)^8$. Die quadratische Summe in L ist aber $= m^8 + m^6(m-2)^2 + m^4(m-2)^4 + m^2(m-2)^6 + (m-2)^8$; ich erhalte dieselbe also, indem ich von der ersten quadratischen Summe in H das unvollständige Biquadrat nehme.

Somit scheint das Gesetz deutlich zu sein. Die quadratische Summe des nächsten Coefficienten wird daher die unvollständige 5te Potenz von $\left\{m^2 + (m-2)^2\right\}$, die nächste die unvollständige 6te Potenz von $\left\{m^2 + (m-2)^2\right\}$ sein, u. s. w. Ebenso kann über das Fortschreiten der Nenner der Coefficienten ein Zweifel wohl nicht vorhanden sein. Ich wende mich daher zu der ferneren Auffindung der Coëfficienten.

11) $-b(m-3) + f + f(m-5) = o$ oder $f = \frac{b(m-3)}{m-4}$ daher $f = \frac{(m-1)(m-3)}{m(m-2)(m-4)}$

12) $fn - c(m-4) = o$ oder $c = f\left(\frac{n}{m-4}\right)$ daher $c = \frac{n(m-1)(m-3)}{m(m-2)(m-4)^2}$

13) $\mathfrak{b}(m-3)H + c(n-1) - f\mathfrak{a} - f(m-5)\mathfrak{a} = o$ oder $\mathfrak{a} = \frac{\mathfrak{b} \cdot H(m-3) + c(n-1)}{f(m-4)}$ folglich:

$$\mathfrak{a} = \frac{\frac{m-1}{m(m-2)} \cdot \frac{n(n-1)\{m^2+(m-2)^2\}(m-3)}{m^2(m-2)^2} + \frac{n(m-1)(m-3)}{m(m-2)(m-4)^2} \cdot (n-1)}{\frac{(m-1)(m-3)}{m(m-2)(m-4)} \cdot (m-4)} = \frac{n(n-1)\{m^2+(m-2)^2\}}{m^2(m-2)^2} + \frac{n(n-1)}{(m-4)^2}$$

$$= n(n-1)\left\{\frac{m^2+(m-2)^2}{m^2(m-2)^2} + \frac{1}{(m-4)^2}\right\} = n(n-1)\left\{\frac{m^2(m-4)^2 + (m-2)^2(m-4)^2 + m^2(m-2)^2}{m^2(m-2)^2(m-4)^2}\right\} \text{ daher}$$

$\mathfrak{a} = \frac{n(n-1)\{m^2(m-2)^2 + m^2(m-4)^2 + (m-2)^2(m-4)^2\}}{m^2(m-2)^2(m-4)^2}$ Die hierin enthaltene quadratische Summe ist aber aus den drei Grössen $m(m-2)(m-4)$ des Nenners von f derart entstanden, dass die Quadrate der Producte von je zwei dieser drei Grössen addirt worden sind.

Soll aber das für die vorigen beiden Serien entwickelte Gesetz über die Reihenfolge der quadratischen Ausdrücke der Coëfficienten auch hier wieder Geltung haben, so muss in dem nächsten Coëfficienten $\mathfrak{b}$ das unvollständige Quadrat von $\left\{m^2(m-2)^2 + m^2(m-4)^2 + (m-2)^2(m-4)^2\right\}$ enthalten sein. Es muss daher, in diesem Falle, weil

$$\left\{m^2(m-2)^2 + m^2(m-4)^2 + (m-2)^2(m-4)^2\right\}^2 = m^4(m-2)^4 + 2m^4(m-2)^2(m-4)^2 + m^4(m-4)^4$$
$$+ 2m^2(m-2)^4(m-4)^2 + 2m^2(m-2)^2(m-4)^4 + (m-2)^4(m-4)^4,$$

das unvollständige Quadrat von $\left\{m^2(m-2)^2 + m^2(m-4)^2 + (m-2)^2(m-4)^2\right\}$, nämlich

$$m^4(m-2)^4 + m^4(m-4)^4 + (m-2)^4(m-4)^4 + m^4(m-2)^2(m-4)^2 + m^2(m-2)^4(m-4)^2 + m^2(m-2)^2(m-4)^4$$

in $\mathfrak{b}$ enthalten sein, wovon ich sogleich Gelegenheit haben werde mich zu überzeugen.

14) $-f\mathfrak{a}(n-2) + cP(m-4) = o$ oder $P = \frac{f\mathfrak{a}(n-2)}{c(m-4)}$, also

$$P = \frac{\frac{(m-1)(m-3)}{m(m-2)(m-4)} \cdot \frac{n(n-1)\{m^2(m-2)^2 + m^2(m-4)^2 + (m-2)^2(m-4)^2\}(n-2)}{m^2(m-2)^2(m-4)^2}}{\frac{n(m-1)(m-3)}{m(m-2)(m-4)^2} \cdot (m-4)} = \frac{(n-1)(n-2)\{m^2(m-2)^2 + m^2(m-4)^2 + (m-2)^2(m-4)^2\}}{m^2(m-2)^2(m-4)^2}$$

15) $-b(m-3)l - cP(n-3) + f\mathfrak{b} + f(m-5)\mathfrak{b} = o$ oder $\mathfrak{b} = \frac{cP(n-3)+bl(m-3)}{f(m-4)}$ folglich

$$\mathfrak{b} = \frac{\frac{n(m-1)(m-3)}{m(m-2)(m-4)^2} \cdot \frac{(n-1)(n-2)\{m^2(m-2)^2+m^2(m-4)^2+(m-2)^2(m-4)^2\}(n-3)}{m^2(m-2)^2(m-4)^2} + \frac{(m-1)}{m(m-2)} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\{m^4+m^2(m-2)^2+(m-2)^4\}(m-3)}{m^4(m-2)^4}}{\frac{(m-1)(m-3)}{m(m-2)(m-4)} \cdot (m-4)}$$ oder

$$\mathfrak{b} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\{m^2(m-2)^2+m^2(m-4)^2+(m-2)^2(m-4)^2\}}{m^2(m-2)^2(m-4)^4} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\{m^4+m^2(m-2)^2+(m-2)^4\}}{m^4(m-2)^4}$$

Es ist also

$$\mathfrak{b} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{m^2(m-2)^2}\left\{\frac{m^2(m-2)^2+m^2(m-4)^2+(m-2)^2(m-4)^2}{(m-4)^4} + \frac{m^4+m^2(m-2)^2+(m-2)^4}{m^2(m-2)^2}\right\}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{m^2(m-2)^2}\left\{\frac{m^4(m-2)^4+m^4(m-2)^2(m-4)^2+m^2(m-2)^4(m-4)^2+m^4(m-4)^4+m^2(m-2)^2(m-4)^4+(m-2)^4(m-4)^4}{m^2(m-2)^2(m-4)^4}\right\}$$ daher

$$\mathfrak{b} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\{m^4(m-2)^4+m^4(m-4)^4+(m-2)^4(m-4)^4+m^4(m-2)^2(m-4)^2+m^2(m-2)^4(m-4)^2+m^2(m-2)^2(m-4)^4\}}{m^4(m-2)^4(m-4)^4}$$

Es findet also auch in diesen beiden Serien dasselbe Gesetz über die Reihenfolge der quadratischen Summen statt, wie bei den vorigen; und wird sich dieses noch mehr dadurch bestätigen, dass in dem nächstfolgenden Coëfficienten $\mathfrak{c}$ der unvollständige Cubus von $\{m^2(m-2)^2 + m^2(m-4)^2 + (m-2)^2(m-4)^2\}$ enthalten ist.

16) $f\mathfrak{b}(n-4) - cQ(m-4) = o$ oder $Q = \frac{f\mathfrak{b}(n-4)}{c(m-4)}$ folglich

$$Q = \frac{\frac{(m-1)(m-3)}{m(m-2)(m-4)} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{m^4} \cdot \frac{\{m^4(m-2)^4+m^4(m-4)^4+(m-2)^4(m-4)^4+m^4(m-2)^2(m-4)^2+m^2(m-2)^4(m-4)^2+m^2(m-2)^2(m-4)^4\}(n-4)}{(m-2)^4(m-4)^4}}{\frac{n(m-1)(m-3)}{m(m-2)(m-4)^2} \cdot (m-4)}.$$

daher

$$Q = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\{m^4(m-2)^4+m^4(m-4)^4+(m-2)^4(m-4)^4+m^4(m-2)^2(m-4)^2+m^2(m-2)^4(m-4)^2+m^2(m-2)^2(m-4)^4\}}{m^4(m-2)^4(m-4)^4}$$

17) $b(m-3)K + cQ(n-5) - f\mathfrak{c} - f(m-5)\mathfrak{c} = o$ oder $\mathfrak{c} = \frac{cQ(n-5)+bK(m-3)}{f(m-4)}$ folglich

$$\mathfrak{c} = \left\{\begin{array}{l}\dfrac{\frac{(n-5)n(m-1)(m-3)}{m(m-2)(m-4)^2} \cdot \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{m^4} \cdot \frac{\{m^4(m-2)^4+m^4(m-4)^4+(m-2)^4(m-4)^4+m^4(m-2)^2(m-4)^2+m^2(m-2)^4(m-4)^2+m^2(m-2)^2(m-4)^4\}}{(m-2)^4(m-4)^4}}{\frac{(m-1)(m-3)}{m(m-2)(m-4)} \cdot (m-4)} \\ + \dfrac{\frac{(m-1)}{m(m-2)} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)\{m^6+m^4(m-2)^2+m^2(m-2)^4+(m-2)^6\} \cdot (m-3)}{m^6(m-2)^6}}{\frac{(m-1)(m-3)}{m(m-2)(m-4)} \cdot (m-4)}\end{array}\right\}$$ oder

$$\mathfrak{c} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{m^4(m-2)^4}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{m^4(m-2)^4+m^4(m-4)^4+(m-2)^4(m-4)^4+m^4(m-2)^2(m-4)^2+m^2(m-2)^4(m-4)^2+m^2(m-2)^2(m-4)^4}{(m-4)^6} \\ + \dfrac{m^6+m^4(m-2)^2+m^2(m-2)^4+(m-2)^6}{m^2(m-2)^2}\end{array}\right\}$$ daher

$$\mathfrak{c} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{m^6(m-2)^6(m-4)^6}\left\{\begin{array}{l}m^6(m-2)^6+m^6(m-4)^6+(m-2)^6(m-4)^6+m^6(m-2)^4(m-4)^2+m^6(m-2)^2(m-4)^4 \\ +m^4(m-2)^6(m-4)^2+m^4(m-2)^2(m-4)^6+m^2(m-2)^6(m-4)^4+m^2(m-2)^4(m-4)^6+m^4(m-2)^4(m-4)^4\end{array}\right\}$$

Die Summe in Parenthese ist aber der unvollständige Cubus von $\{m^2(m-2)^2 + m^2(m-4)^2 + (m-2)^2(m-4)^2\}$, und bin ich daher zu der Annahme berechtigt, dass die quadratische Summe des nächsten Coëfficienten das unvollständige Biquadrat von $\{m^2(m-2)^2 + m^2(m-4)^2 + (m-2)^2(m-4)^2\}$, die folgende quadratische Summe die unvollständige 5te Potenz von $m^2(m-2)^2 + m^2(m-4)^2 + (m-2)^2(m-4)^2$ u. s. w. sein werde.

18) $-f(m-5) + h + h(m-7) = o$ oder $h = \frac{f(m-5)}{m-6}$, daher $h = \frac{(m-1)(m-3)(m-5)}{m(m-2)(m-4)(m-6)}$

Es war aber vorher in No. 13) $m^2(m-2)^2 + m^2(m-4)^2 + (m-2)^2(m-4)^2$, nämlich die quadratische Summe

in $\mathfrak{a}$, gleich der Summe der Quadrate der Producte von je zwei der drei Grössen $m(m-2)(m-4)$. Wenn daher jetzt die quadratische Summe in $\mathfrak{p}$ gleich der Summe der Quadrate der Producte von je drei der vier Grössen $m(m-2)(m-4)(m-6)$ sein würde, so wäre alsdann das Gesetz, nach welchem überhaupt die ersten quadratischen Summen für je zwei und zwei Serien entstanden sind, als bekannt anzusehn. denn demnach wäre ich anzunehmen berechtigt, dass die erste quadratische Summe der beiden nächstfolgenden Serien gleich der Summe der Quadrate der Producte von je vier der fünf Grössen $m(m-2)(m-4)(m-6)(m-8)$ sein würde. Ich werde mich aber sogleich von der Beschaffenheit des $\mathfrak{p}$ überzeugen.

19) $hn - g(m-6) = o$ oder $g = \frac{hn}{m-6}$, daher $g = \frac{n(m-1)(m-3)(m-5)}{m(m-2)(m-4)(m-6)^2}$

20) $f(m-5)\mathfrak{a} + g(n-1) - h\mathfrak{p} - h(m-7)\mathfrak{p} = o$ oder $\mathfrak{p} = \frac{g(n-1)+f(m-5)\mathfrak{a}}{h(m-6)}$, folglich

$$\mathfrak{p} = \frac{\frac{n(m-1)(m-3)(m-5)(n-1)}{m(m-2)(m-4)(m-6)^2} + \frac{(m-1)(m-3)(m-5)}{m(m-2)(m-4)} \cdot \frac{n(n-1)\{m^2(m-2)^2+m^2(m-4)^2+(m-2)^2(m-4)^2\}}{m^2(m-2)^2(m-4)^2}}{\frac{(m-1)(m-3)(m-5)}{m(m-2)(m-4)(m-6)} \cdot (m-6)}$$

$$= \frac{n(n-1)\{m^2(m-2)^2+m^2(m-4)^2+(m-2)^2(m-4)^2\}}{m^2(m-2)^2(m-4)^2} + \frac{n(n-1)}{(m-6)^2} = n(n-1)\left\{\frac{m^2(m-2)^2+m^2(m-4)^2+(m-2)^2(m-4)^2}{m^2(m-2)^2(m-4)^2} + \frac{1}{(m-6)^2}\right\} \text{ daher}$$

$$\mathfrak{p} = \frac{n(n-1)\{m^2(m-2)^2(m-4)^2+m^2(m-2)^2(m-6)^2+m^2(m-4)^2(m-6)^2+(m-2)^2(m-4)^2(m-6)^2\}}{m^2(m-2)^2(m-4)^2(m-6)^2}$$

Da meine Voraussetzung sich bestätigt, kann ich nunmehr das Gesetz, nach welchem $\int x^n . \cos^m x . dx$ entstanden ist, als bekannt betrachten, und sogleich zur Aufstellung des Integrales selbst schreiten. Es entsteht also:

$$\int x^n . \cos^m x . dx = \frac{n}{m^2} . \cos^m x \left\{x^{n-1} - \frac{(n-1)(n-2)}{m^2}x^{n-3} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{m^4}x^{n-5} - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}{m^6}x^{n-7} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{m^8}x^{n-9} \dots\dots\right\}$$

$$+ \frac{1}{m}\cos^{m-1} x . \sin x \left\{x^n - \frac{n(n-1)}{m^2}x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{m^4}x^{n-4} - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{m^6}x^{n-6} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)}{m^8}x^{n-8} \dots\dots\right\}$$

$$+ \frac{n(m-1)}{m(m-2)^2}\cos^{m-2} x \left\{x^{n-1} - \frac{(n-1)(n-2)\{m^2+(m-2)^2\}}{m^2(m-2)^2}x^{n-3} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\{m^4+m^2(m-2)^2+(m-2)^4\}}{m^4(m-2)^4}x^{n-5} - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)\{m^6+m^4(m-2)^2+m^2(m-2)^4+(m-2)^6\}}{m^6(m-2)^6}x^{n-7}\right.$$

$$\left. + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)\{m^8+m^6(m-2)^2+m^4(m-2)^4+m^2(m-2)^6+(m-2)^8\}}{m^8(m-2)^8}x^{n-9} - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)(n-10)\{m^{10}+m^8(m-2)^2+m^6(m-2)^4+m^4(m-2)^6+m^2(m-2)^8+(m-2)^{10}\}}{m^{10}(m-2)^{10}}x^{n-11} \dots\right\}$$

$$+ \frac{(m-1)}{m(m-2)}\cos^{m-3} x . \sin x \left\{x^n - \frac{n(n-1)\{m^2+(m-2)^2\}}{m^2(m-2)^2}x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\{m^4+m^2(m-2)^2+(m-2)^4\}}{m^4(m-2)^4}x^{n-4} - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)\{m^6+m^4(m-2)^2+m^2(m-2)^4+(m-2)^6\}}{m^6(m-2)^6}x^{n-6}\right.$$

$$\left. + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)\{m^8+m^6(m-2)^2+m^4(m-2)^4+m^2(m-2)^6+(m-2)^8\}}{m^8(m-2)^8}x^{n-8} - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)\{m^{10}+m^8(m-2)^2+m^6(m-2)^4+m^4(m-2)^6+m^2(m-2)^8+(m-2)^{10}\}}{m^{10}(m-2)^{10}}x^{n-10} \dots\right\}$$

$$+ \frac{n(m-1)(m-3)}{m(m-2)(m-4)^2}\cos^{m-4} x \left\{x^{n-1} - \frac{(n-1)(n-2)\{m^2(m-2)^2+m^2(m-4)^2+(m-2)^2(m-4)^2\}}{m^2(m-2)^2(m-4)^2}x^{n-3} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\{m^4(m-2)^4+m^4(m-4)^4+(m-2)^4(m-4)^4+m^4(m-2)^2(m-4)^2+m^2(m-2)^4(m-4)^2+m^2(m-2)^2(m-4)^4\}}{m^4(m-2)^4(m-4)^4}x^{n-5}\right.$$

$$\left. - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)\{m^6(m-2)^6+m^6(m-4)^6+(m-2)^6(m-4)^6+m^6(m-2)^4(m-4)^2+m^6(m-2)^2(m-4)^4+m^4(m-2)^6(m-4)^2+m^4(m-2)^2(m-4)^6+m^2(m-2)^6(m-4)^4+m^2(m-2)^4(m-4)^6+m^4(m-2)^4(m-4)^4\}}{m^6(m-2)^6(m-4)^6}x^{n-7} \dots\right\}$$

$$+ \frac{(m-1)(m-3)}{m(m-2)(m-4)}\cos^{m-5} x . \sin x \left\{x^n - \frac{n(n-1)\{m^2(m-2)^2+m^2(m-4)^2+(m-2)^2(m-4)^2\}}{m^2(m-2)^2(m-4)^2}x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\{m^4(m-2)^4+m^4(m-4)^4+(m-2)^4(m-4)^4+m^4(m-2)^2(m-4)^2+m^2(m-2)^4(m-4)^2+m^2(m-2)^2(m-4)^4\}}{m^4(m-2)^4(m-4)^4}x^{n-4} \dots\right\}$$

$$+ \frac{n(m-1)(m-3)(m-5)}{m(m-2)(m-4)(m-6)^2}\cos^{m-6} x \left\{x^{n-1} - \frac{(n-1)(n-2)\{m^2(m-2)^2(m-4)^2+m^2(m-2)^2(m-6)^2+m^2(m-4)^2(m-6)^2+(m-2)^2(m-4)^2(m-6)^2\}}{m^2(m-2)^2(m-4)^2(m-6)^2}x^{n-3} + \dots\dots\right\}$$

$$+ \frac{(m-1)(m-3)(m-5)}{m(m-2)(m-4)(m-6)}\cos^{m-7} x . \sin x \left\{x^n - \frac{n(n-1)\{m^2(m-2)^2(m-4)^2+m^2(m-2)^2(m-6)^2+m^2(m-4)^2(m-6)^2+(m-2)^2(m-4)^2(m-6)^2\}}{m^2(m-2)^2(m-4)^2(m-6)^2}x^{n-2} + \dots\dots\right\}$$

$$+ \frac{n(m-1)(m-3)(m-5)(m-7)}{m(m-2)(m-4)(m-6)(m-8)^2}\cos^{m-8} x \left\{x^{n-1} - \frac{(n-1)(n-2)\{m^2(m-2)^2(m-4)^2(m-6)^2+m^2(m-2)^2(m-4)^2(m-8)^2+m^2(m-2)^2(m-6)^2(m-8)^2+m^2(m-4)^2(m-6)^2(m-8)^2+(m-2)^2(m-4)^2(m-6)^2(m-8)^2\}}{m^2(m-2)^2(m-4)^2(m-6)^2(m-8)^2}x^{n-3} \dots\dots\right\}$$

$$+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots + C.$$

Es scheint dieses Integral nur, wenn m ungerade ist, brauchbar zu sein; indess kann man es auch zur Auffindung der Integrale benutzen, wenn m gerade ist. Bei $\int x^n \cdot \cos^2 x\, dx$, also wenn $m = 2$, ebenso wie bei $\int x^n \cdot \cos^4 x\, dx$, also wenn $m = 4$, entstehen, der Formel des $\int x^n \cos^m x\, dx$ gemäss, die Glieder bis einschliesslich des mit $\cos x \cdot \sin x$ multiplicirten, vollkommen richtig; es handelt sich also nur um denjenigen Theil der Integrale, wenn m gerade, welcher nicht mit trigonometrischen Factoren multiplicirt ist. Derselbe ist von der Form $\frac{ax^{n+1}}{n+1} + bn \left\{ x^{n-1} + cx^{n-3} + fx^{n-5} + \ldots \right\}$ und es ist mir daran gelegen, die Coëfficienten kennen zu lernen. Um aber die Art ihrer Entstehung zu erkennen, werde ich, ausser bei den trigonometrischen Factoren, das allgemeine Zeichen m beibehalten. Es sei $m = 2$ und es möge sein

$$\int x^n \cdot \cos^2 x \cdot dx = \frac{n}{m^2} \cos^2 x \left\{ x^{n-1} - \frac{(n-1)(n-2)}{m^2} x^{n-3} + \ldots \right\} + \frac{1}{m} \cos x \sin x \left\{ x^n - \frac{n(n-1)}{m^2} x^{n-2} + \ldots \right\}$$

$$+ \frac{a x^{n+1}}{n+1} + bn \left\{ x^{n-1} - \frac{(n-1)(n-2)}{m^2} x^{n-3} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{m^4} x^{n-5} - \ldots \right\} + C.$$

Wären statt der unbestimmten Coëfficienten a und b ihre durch m und n ausgedrückten Werthe in dieser Gleichung vorhanden, so würde die Differenziation der Gleichung identisch $o = o$ ergeben. Da aber a und b noch unbestimmt sind, so heben sich nach der Differenziation zwar alle übrigen Glieder hinweg, aber diejenigen Glieder, welche dieselben Potenzen enthalten, als die mit a und b multiplicirten, bleiben zur Bestimmung dieser beiden Grössen übrig. Dennoch führe ich für dieses Mal die ganze Differenziation aus, welche ergiebt:

$$x^n \cos^2 x = \frac{n}{m^2} \cos^2 x \left\{ (n-1) x^{n-2} - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{m^2} x^{n-4} + \ldots \right\} - \frac{2n}{m^2} \cos x \sin x \left\{ x^{n-1} - \frac{(n-1)(n-2)}{m^2} x^{n-3} + \ldots \right\}$$

$$+ \frac{1}{m} \cos x \sin x \left\{ n x^{n-1} - \frac{n(n-1)(n-2)}{m^2} x^{n-3} + \ldots \right\} + \frac{1}{m} \cos^2 x \left\{ x^n - \frac{n(n-1)}{m^2} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{m^4} x^{n-4} - \ldots \right\}$$

$$- \frac{1}{m} \sin^2 x \left\{ x^n - \frac{n(n-1)}{m^2} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{m^4} x^{n-4} \ldots \right\} + a x^n + bn(n-1) x^{n-2} - \frac{bn(n-1)(n-2)(n-3)}{m^2} x^{n-4} + \ldots$$

oder mit Berücksichtigung, dass $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ geordnet:

$$x^n \cdot \cos^2 x = \cos^2 x \left\{ \begin{array}{l} \qquad\qquad \frac{n(n-1)}{m^2} x^{n-2} - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{m^2} x^{n-4} + \ldots \\ + \frac{1}{m} x^n - \frac{n(n-1)}{m^3} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{m^5} x^{n-4} - \ldots \\ + \frac{1}{m} x^n - \frac{n(n-1)}{m^3} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{m^5} x^{n-4} - \ldots \end{array} \right\} + \cos x \sin x \left\{ \begin{array}{l} \frac{n}{m} x^{n-1} - \frac{n(n-1)(n-2)}{m^3} x^{n-3} + \ldots \\ - \frac{2n}{m^2} x^{n-1} + \frac{2n(n-1)(n-2)}{m^4} x^{n-3} - \ldots \end{array} \right\}$$

$$- \frac{1}{m} x^n + \frac{n(n-1)}{m^3} x^{n-2} - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{m^5} x^{n-4} + \ldots$$

$$+ a x^n + b n (n-1) x^{n-2} - \frac{bn(n-1)(n-2)(n-3)}{m^2} x^{n-4} + \ldots$$

Da $m = 2$, so heben sich in der That alle übrigen Glieder hinweg, und es bleiben nur folgende Gleichungen übrig:

1) $a - \frac{1}{m} = o$ also $a = \frac{1}{m}$ nämlich gleich dem Coëfficienten von $\sin x \cos x$

2) $bn(n-1) + \frac{n(n-1)}{m^3} = o$ oder $b = -\frac{1}{m^3} = -\left(\frac{1}{m}\right)\left(\frac{1}{m^2}\right)$.

Wenn $m = 4$, so möge sein

$$\int x^n \cos^4 x \, dx = \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{m-1}{m(m-2)} \cos x \sin x \left\{ x^n - \frac{n(n-1)}{m^2} \cdot \frac{\{m^2 + (m-2)^2\}}{(m-2)^2} x^{n-2} \right.$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\{m^4 + m^2(m-2)^2 + (m-2)^4\}}{m^4 (m-2)^4} x^{n-4} - \ldots \Big\} + a\frac{x^{n+1}}{n+1} + bn \left\{ \left(\frac{m^2 + (m-2)^2}{(m-2)^2} \right) x^{n-1} \right.$$

$$\left. - \frac{(n-1)(n-2)\{m^4 + m^2(m-2)^2 + (m-2)^4\}}{m^2 (m-2)^4} x^{n-3} + \ldots \right\} + C,$$ und zwar ist zu dieser Aufstellung das Resultat des §. 10. benutzt worden, bei welchem die Entstehung der Factoren 5, 21, 85 u. s. w. mir bekannt ist. Es ist nämlich $\frac{4^2 + 2^2}{2^2} = \frac{16+4}{4} = \frac{20}{4} = 5$

$\frac{4^4 + 4^2 \cdot 2^2 + 2^4}{2^4} = \frac{256 + 64 + 16}{16} = \frac{336}{16} = 21$ u. s. w. — Durch Differenziation entsteht nun folgende Gleichung:

$$o = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{m-1}{m(m-2)} \cos x \sin x \left\{ nx^{n-1} - \frac{n(n-1)(n-2)\{m^2 + (m-2)^2\}}{m^2 (m-2)^2} x^{n-3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\{m^4 + m^2(m-2)^2 + (m-2)^4\}}{m^4 (m-2)^4} x^{n-5} - \ldots \right\}$$

$$+ \frac{m-1}{m(m-2)} \cos^2 x \left\{ x^n - \frac{n(n-1)\{m^2 + (m-2)^2\}}{m^2 (m-2)^2} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\{m^4 + m^2(m-2)^2 + (m-2)^4\}}{m^4 (m-2)^4} x^{n-4} - \ldots \right\}$$

$$- \frac{m-1}{m(m-2)} \sin^2 x \left\{ x^n - \frac{n(n-1)\{m^2 + (m-2)^2\}}{m^2 (m-2)^2} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\{m^4 + m^2(m-2)^2 + (m-2)^4\}}{m^4 (m-2)^4} x^{n-4} - \ldots \right\}$$

$$+ ax^n + \frac{bn\{m^2 + (m-2)^2\}(n-1)}{(m-2)^2} x^{n-2} - \frac{bn(n-1)(n-2)\{m^4 + m^2(m-2)^2 + (m-2)^4\}(n-3)}{m^2 (m-2)^4} x^{n-4} + \ldots$$

Alle übrigen Glieder heben sich hinweg, und es bleibt nur folgende Gleichung übrig

$$o = - \frac{(m-1)}{m(m-2)} x^n + \frac{(m-1)}{m(m-2)} \cdot \frac{n(n-1)\{m^2 + (m-2)^2\}}{m^2 (m-2)^2} x^{n-2} - \frac{(m-1)}{m(m-2)} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\{m^4 + m^2(m-2)^2 + (m-2)^4\}}{m^4 (m-2)^4} x^{n-4} \ldots$$

$$+ ax^n + \frac{bn(n-1)\{m^2 + (m-2)^2\}}{(m-2)^2} x^{n-2} - \frac{bn(n-1)(n-2)\{m^4 + m^2(m-2)^2 + (m-2)^4\}(n-3)}{m^2 (m-2)^4} x^{n-4} \ldots$$

Daher ist

1) $a - \frac{m-1}{m(m-2)} = o$ oder $a = \frac{m-1}{m(m-2)}$ also wieder gleich dem Coefficienten von $\cos x \sin x$

2) $\frac{bn(n-1)\{m^2 + (m-2)^2\}}{(m-2)^2} + \frac{m-1}{m(m-2)} \cdot \frac{n(n-1)\{m^2 + (m-2)^2\}}{m^2 (m-2)^2} = o$ oder $b = - \frac{m-1}{m(m-2)} \cdot \left(\frac{1}{m^2}\right)$

die mit b multiplicirte Summe beginnt aber bereits bei der Potenz x^{n-1} mit der ersten quadratischen Summe in der mit $\cos x \sin x$ multiplicirten Serie, nämlich mit $\frac{m^2 + (m-2)^2}{(m-2)^2}$, und setzen sich die folgenden quadratischen Summen darin auch weiter fort. Ich werde nunmehr mein Augenmerk darauf zu richten haben, ob, wenn $m = 6$, beim $\int x^n \cdot \cos^6 x \, dx$ der Coëfficient a wieder gleich dem Coëfficienten von $\cos x \sin x$ ist, nämlich $a = \frac{(m-1)(m-3)}{m(m-2)(m-4)}$ und wieder $b = - \frac{(m-1)(m-3)}{m(m-2)(m-4)} \cdot \left(\frac{1}{m^2}\right)$ sein wird. Auch werde ich, nach Analogie des $\int x^n \cdot \cos^4 x \, dx$, bei $\int x^n \cdot \cos^6 x \, dx$ bei der mit keinem trigonometrischen Factoren multiplicirten Summe, der Potenz x^{n-1} die Grösse $\frac{m^2(m-2)^2 + m^2(m-4)^2 + (m-2)^2(m-4)^2}{(m-2)^2 (m-4)^2}$ zum Factor geben, sowie bei den folgenden Potenzen mit den folgenden quadratischen Ausdrücken der mit $\cos x \sin x$ multiplicirten Serie fortfahren. Es sei daher $m = 6$ und

$$\int x^n . \cos^6 x . dx = \ldots\ldots + \frac{(m-1)(m-3)}{m(m-2)(m-4)} \cos x \sin x \Big\{ x^n - \frac{n(n-1)\{m^2(m-2)^2 + m^2(m-4)^2 + (m-2)^2(m-4)^2\}}{m^2(m-2)^2(m-4)^2} x^{n-2}$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\{m^4(m-2)^4 + m^4(m-4)^4 + (m-2)^4(m-4)^4 + m^4(m-2)^2(m-4)^2 + m^2(m-2)^4(m-4)^2 + m^2(m-2)^2(m-4)^4\}}{m^4(m-2)^4(m-4)^4} x^{n-4} \ldots \Big\}$$

$$+ \frac{ax^{n+1}}{n+1} + bn \Big\{ \left(\frac{m^2(m-2)^2 + m^2(m-4)^2 + (m-2)^2(m-4)^2}{(m-2)^2(m-4)^2} \right) x^{n-1}$$

$$- \frac{(n-1)(n-2)}{m^2} \frac{\{m^4(m-2)^4 + m^4(m-4)^4 + (m-2)^4(m-4)^4 + m^4(m-2)^2(m-4)^2 + m^2(m-2)^4(m-4)^2 + m^2(m-2)^2(m-4)^4\}}{(m-2)^4(m-4)^4} x^{n-4} \ldots\ldots \Big\}$$

Die übrigen Glieder heben sich nach der Differenziation hinweg, und es bleibt nur folgende Gleichung von Interesse

$$o = - \frac{(m-1)(m-3)}{m(m-2)(m-4)} x^n + \frac{(m-1)(m-3)}{m(m-2)(m-4)} . \frac{n(n-1)\{m^2(m-2)^2 + m^2(m-4)^2 + (m-2)^2(m-4)^2\}}{m^2 (m-2)^2(m-4)^2} x^{n-2}$$

$$+ ax^n \qquad + \frac{bn(n-1)\{m^2(m-2)^2 + m^2(m-4)^2 + (m-2)^2(m-4)^2\}}{(m-2)^2(m-4)^2} x^{n-2}$$

$$- \frac{(m-1)(m-3)}{m(m-2)(m-4)} . \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\{m^4(m-2)^4 + m^4(m-4)^4 + (m-2)^4(m-4)^4 + m^4(m-2)^2(m-4)^2 + m^2(m-2)^4(m-4)^2 + m^2(m-2)^2(m-4)^4\}}{m^4(m-2)^4(m-4)^4} x^{n-4} \ldots$$

$$- \frac{bn(n-1)(n-2)(n-3)\{m^4(m-2)^4 + m^4(m-4)^4 + (m-2)^4(m-4)^4 + m^4(m-2)^2(m-4)^2 + m^2(m-2)^4(m-4)^2 + m^2(m-2)^2(m-4)^4\}}{m^2(m-2)^4(m-4)^4} x^{n-4} \ldots$$

Es ist also

1) $a = \frac{(m-1)(m-3)}{m(m-2)(m-4)}$ also wieder gleich dem Coëfficienten von $\cos x \sin x$.

2) $\frac{bn(n-1)\{m^2(m-2)^2 + m^2(m-4)^2 + (m-2)^2(m-4)^2\}}{(m-2)^2(m-4)^2} = - \frac{(m-1)(m-3)}{m(m-2)(m-4)} . \frac{n(n-1)\{m^2(m-2)^2 + m^2(m-4)^2 + (m-2)^2(m-4)^2\}}{m^2(m-2)^2(m-4)^2}$

daher

$b = - \frac{(m-1)(m-3)}{m(m-2)(m-4)} . \left(\frac{1}{m^2}\right)$; mithin ist $a = \frac{5}{16}$ und $b = - \frac{5}{576}$

Wenn also m gerade, so erhalten die letzten Glieder des $\int x^n . \cos^m x \, dx$ folgende Form

. . . .

$$+ A \cos x \sin x \Big\{ x^n - \frac{n(n-1)}{m^2} . Bx^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{m^4} Cx^{n-4} - \ldots \Big\}$$

$$+ a \frac{x^{n+1}}{n+1} + bn \Big\{ cx^{n-1} - \frac{(n-1)(n-2)}{m^2} fx^{n-3} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{m^4} gx^{n-5} - \ldots \Big\} + C$$

und es ist $a = A$, und $b = - A . \left(\frac{1}{m^2}\right)$, $c = B =$ der ersten quadratischen Summe, dividirt durch die Quadrate der Producte der zugehörigen Differenzen in der mit $\cos x \sin x$ multiplicirten Serie. Es sind aber diese quadratischen Summen nicht durch Potenzen von m dividirt: um in keinen Irrthum zu verfallen, halte ich nur fest, dass zu den Factoren $(n-1)(n-2)$ der Nenner m^2, zu den Factoren $(n-3)(n-2)(n-3)(n-4)$ der Nenner m^4 u. s. w. gehört.

Ich bin also berechtigt, das $\int x^n . \cos^m x \, dx$, gleichviel ob m gerade oder ungerade, als eine bekannte Grösse zu betrachten.

Es sei z. B. $m = 5$, dann entsteht aus der Formel für $\int x^n \cos^m x . dx$

$$\int x^n . \cos^5 x \, dx = \frac{n}{25} \cos^5 x \Big\{ x^{n-1} - \frac{(n-1)(n-2)}{5^2} x^{n-3} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5^4} x^{n-5} - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}{5^6} x^{n-7} \ldots \Big\}$$

$$+ \frac{1}{5} \cos^4 x \sin x \Big\{ x^n - \frac{n(n-1)}{5^2} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{5^4} x^{n-4} - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{5^6} x^{n-6} + \ldots \Big\}$$

$$+ \tfrac{4}{45}\, n \cos^5 x \left\{ x^{n-1} - \tfrac{(n-1)(n-2)}{5^2}\left(\tfrac{34}{9}\right) x^{n-3} + \tfrac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5^4}\left(\tfrac{931}{81}\right) x^{n-5} \right.$$

$$\left. - \tfrac{(n-1)(n-2)(n-5)(n-4)(n-5)(n-6)}{5^6}\, x^{n-7} . \left(\tfrac{24004}{729}\right) + \tfrac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{5^8}\left(\tfrac{606661}{6561}\right) x^{n-9} \ldots \right\}$$

$$+ \tfrac{4}{15} \cos^2 x \sin x \left\{ x^n - \tfrac{n(n-1)}{5^2}\left(\tfrac{34}{9}\right) x^{n-2} + \tfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{5^4}\left(\tfrac{931}{81}\right) x^{n-4} \right.$$

$$\left. - \tfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{5^6}\left(\tfrac{24004}{729}\right) x^{n-6} + \tfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)}{5^8}\left(\tfrac{606661}{6561}\right) x^{n-8} \ldots \right\}$$

$$+ \tfrac{8}{15}\, n \cos x \left\{ x^{n-1} - \tfrac{(n-1)(n-2)}{5^2}\left(\tfrac{259}{9}\right) x^{n-3} + \tfrac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5^4}\left(\tfrac{59206}{81}\right) x^{n-5} - \ldots \right\}$$

$$+ \tfrac{8}{15} \sin x \left\{ x^n - \tfrac{n(n-1)}{5^2}\left(\tfrac{259}{9}\right) x^{n-2} + \tfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{5^4}\left(\tfrac{59206}{81}\right) x^{n-4} - \ldots \right\} + C.$$

Wenn $n = 4$, so sollte demnach sein

$$\int x^4 \cos^5 x\, dx = \tfrac{4}{25} \cos^5 x \left(x^3 - \tfrac{3.2}{5^2} x\right) + \tfrac{1}{5} \cos^4 x \sin x \left(x^4 - \tfrac{4.3}{5^2} x^2 + \tfrac{4.3.2.1}{5^4}\right) + \tfrac{16}{45} \cos^3 x \left(x^3 - \tfrac{34.3.2}{9.5^2} x\right)$$

$$+ \tfrac{4}{15} \cos^2 x \sin x \left(x^4 - \tfrac{54.4.3}{9.\ 5^2} x^2 + \tfrac{931.4.3.2.1}{81.\ \ 5^4}\right) + \tfrac{32}{15} \cos x \left(x^3 - \tfrac{259.5.2}{9.\ 5^2} x\right)$$

$$+ \tfrac{8}{15} \sin x \left(x^4 - \tfrac{259.4.5}{9.\ 5^2} x^2 + \tfrac{59206.\ 4.3.2.1}{81.\ \ 5^4}\right) + C \text{ oder}$$

$$y = \int x^4 . \cos^5 x . dx = \left(\tfrac{4}{25} x^3 - \tfrac{24}{625} x\right) \cos^5 x + \left(\tfrac{1}{5} x^4 - \tfrac{12}{125} x^2 + \tfrac{24}{5125}\right) \cos^4 x \sin x + \left(\tfrac{16}{45} x^3 - \tfrac{3264}{10125} x\right) \cos^3 x$$

$$+ \left(\tfrac{4}{15} x^4 - \tfrac{1632}{3375} x^2 + \tfrac{89376}{759375}\right) \cos^2 x \sin x + \left(\tfrac{32}{15} x^3 - \tfrac{49728}{3375} x\right) \cos x\,.$$

$$+ \left(\tfrac{8}{15} x^4 - \tfrac{24864}{3375} x^2 + \tfrac{3789184}{255125}\right) \sin x + C$$

Dann müsste aber auch sein

$$\tfrac{dy}{dx} = -\left(\tfrac{4}{25} x^3 - \tfrac{24}{625} x\right) 5 \cos^4 x \sin x + \cos^5 x \left(\tfrac{4}{25} . 3x^2 - \tfrac{24}{625}\right) + \left(\tfrac{1}{5} x^4 - \tfrac{12}{125} x^2 + \tfrac{24}{3125}\right) \cos^5 x$$

$$- \left(\tfrac{1}{5} x^4 - \tfrac{12}{125} x^2 + \tfrac{24}{3125}\right) \sin^2 x . 4 \cos^3 x + \cos^4 x \sin x \left(\tfrac{1}{5} . 4x^3 - \tfrac{12}{125} . 2x\right) - \left(\tfrac{16}{45} x^3 - \tfrac{3264}{10125} x\right) . 3 \cos^2 x \sin x$$

$$+ \cos^3 x \left(\tfrac{16}{45} . 3x^2 - \tfrac{5264}{10125}\right) + \left(\tfrac{4}{15} x^4 - \tfrac{1632}{5575} x^2 + \tfrac{89376}{759375}\right) \cos^3 x - \left(\tfrac{4}{15} x^4 - \tfrac{1632}{5375} x^2 + \tfrac{89376}{759375}\right) \sin^2 x . 2 \cos x$$

$$+ \cos^2 x \sin x \left(\tfrac{4}{15} . 4x^3 - \tfrac{1632}{3375} . 2x\right) - \left(\tfrac{32}{15} x^3 - \tfrac{49728}{3375} x\right) \sin x + \cos x \left(\tfrac{32}{15} . 3x^2 - \tfrac{49728}{5575}\right)$$

$$+ \left(\tfrac{8}{15} x^4 - \tfrac{24864}{5375} x^2 + \tfrac{5789184}{255125}\right) \cos x + \sin x \left(\tfrac{8}{15} . 4x^3 - \tfrac{24864}{5575} . 2x\right)$$

oder wenn ich diesen Differentialquotienten mit der Berücksichtigung ordne, dass $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$,

$$\tfrac{dy}{dx} = -\tfrac{4}{5} x^3 \cos^4 x \sin x + \tfrac{24}{125} x \cos^4 x \sin x + \tfrac{22}{25} x^2 \cos^5 x - \tfrac{24}{625} \cos^5 x + \tfrac{1}{5} x^4 . \cos^5 x - \tfrac{4}{5} x^4 \cos^3 x$$

$$+ \tfrac{4}{5} x^3 \cos^4 x \sin x - \tfrac{24}{125} x \cos^4 x \sin x - \tfrac{12}{125} x^2 \cos^5 x + \tfrac{24}{3125} \cos^5 x + \tfrac{4}{5} x^4 . \cos^5 x + \tfrac{4}{15} x^4 \cos^5 x$$

$$- \tfrac{48}{125} x^2 \cos^5 x + \tfrac{96}{3125} \cos^5 x \qquad + \tfrac{8}{15} x^4 \cos^3 x$$

$$+\tfrac{48}{125}x^2\cos^3 x-\tfrac{96}{3125}\cos^3 x+\tfrac{16}{15}x^3\cos^2 x\sin x-\tfrac{3264}{3375}x\cos^2 x\sin x-\tfrac{8}{15}x^4 .\cos x$$
$$+\tfrac{16}{15}x^2\cos^3 x-\tfrac{1088}{3375}\cos^3 x-\tfrac{16}{15}x^3\cos^2 x\sin x+\tfrac{3264}{3375}x\cos^2 x\sin x+\tfrac{8}{15}x^4 .\cos x$$
$$-\tfrac{544}{1125}x^2\cos^3 x+\tfrac{29792}{253125}\cos^3 x$$
$$-\tfrac{3264}{3375}x^2\cos^3 x+\tfrac{178752}{759375}\cos^3 x$$
$$+\tfrac{3264}{3375}x^2\cos x-\tfrac{178752}{759375}\cos x-\tfrac{32}{15}x^3\sin x+\tfrac{49728}{3375}x\sin x$$
$$+\tfrac{32}{5}x^2\cos x-\tfrac{49728}{3375}\cos x+\tfrac{32}{15}x^3\sin x-\tfrac{49728}{3375}x\sin x$$
$$-\tfrac{24864}{3375}x^2\cos x+\tfrac{3789184}{253125}\cos x$$

oder

$\frac{dy}{dx}=x^4 .\cos^5 x$, daher es mit dem Integral seine Richtigkeit hat.

Wenn im $\int x^n .\cos^m x\,dx$ noch $m=6$, so entsteht

$$\int x^n .\cos^6 x .dx=\tfrac{n}{36}\cos^6 x\Big\{x^{n-1}-\tfrac{(n-1)(n-2)}{6^2}x^{n-3}+\tfrac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{6^4}x^{n-5}-\tfrac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}{6^6}x^{n-7}\ldots\Big\}$$
$$+\tfrac{1}{6}\cos^5 x\sin x\Big\{x^n-\tfrac{n(n-1)}{6^2}x^{n-2}+\tfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{6^4}x^{n-4}-\tfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{6^6}x^{n-6}\ldots\ldots\Big\}$$
$$+\tfrac{5}{96}n\cos^4 x\Big\{x^{n-1}-\tfrac{(n-1)(n-2)}{6^2}\Big(\tfrac{13}{4}\Big)x^{n-3}+\tfrac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{6^4}\Big(\tfrac{133}{16}\Big)x^{n-5}-\tfrac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}{6^6}\Big(\tfrac{1261}{64}\Big)x^{n-7}\ldots\Big\}$$
$$+\tfrac{5}{24}\cos^3 x\sin x\Big\{x^n-\tfrac{n(n-1)}{6^2}\Big(\tfrac{13}{4}\Big)x^{n-2}+\tfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{6^4}\Big(\tfrac{133}{16}\Big)x^{n-4}-\tfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{6^6}\Big(\tfrac{1261}{64}\Big)x^{n-6}\ldots\Big\}$$
$$+\tfrac{5}{32}n\cos^2 x\Big\{x^{n-1}-\tfrac{(n-1)(n-2)}{6^2}\Big(\tfrac{49}{4}\Big)x^{n-3}+\tfrac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{6^4}\Big(\tfrac{1897}{16}\Big)x^{n-5}-\tfrac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}{6^6}\Big(\tfrac{69553}{64}\Big)x^{n-7}\ldots\Big\}$$
$$+\tfrac{5}{16}\cos x\sin x\Big\{x^n-\tfrac{n(n-1)}{6^2}\Big(\tfrac{49}{4}\Big)x^{n-2}+\tfrac{n(n-1)(n-4)(n-3)}{6^4}\Big(\tfrac{1897}{16}\Big)x^{n-4}-\tfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{6^6}\Big(\tfrac{69553}{64}\Big)x^{n-6}\ldots\Big\}$$
$$+\tfrac{5}{16}\Big(\tfrac{x^{n+1}}{n+1}\Big)-\tfrac{5}{576}n\Big\{\Big(\tfrac{49}{4}\Big)x^{n-1}-\tfrac{(n-1)(n-2)}{6^2}\Big(\tfrac{1897}{16}\Big)x^{n-3}+\tfrac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{6^4}\Big(\tfrac{69553}{64}\Big)x^{n-5}-\ldots\Big\}+C.$$

§. 11.

Ich werde nun noch einen Schritt weiter gehn.

Es sei $u=x^n .\cos^m x\sin^p x$ und $v=x$, dann ist

$\frac{du}{dx}=x^n .\cos^m x .p\sin^{p-1} x .\cos x-x^n\sin^p x .m\cos^{m-1} x .\sin x+\sin^p x .\cos^m x .nx^{n-1}$ und daher

$vdu=px^{n+1} .\cos^{m+1} x .\sin^{p-1} x .dx-mx^{n+1} .\cos^{m-1} x\sin^{p+1} x .dx+nx^n\cos^m x\sin^p x .dx$

Weil nun $\int u .dv=uv-\int vdu$, so folgt

$$\int x^n .\cos^m x .\sin^p x .dx=x^{n+1} .\cos^m x\sin^p x-p\int x^{n+1} .\cos^{m+1} x .\sin^{p-1} x .dx+m\int x^{n+1} .\cos^{m-1} x .\sin^{p+1} x .dx$$
$$-n\int x^n .\cos^m x .\sin^p x .dx \text{ oder}$$

$$(n+1)\int x^n\cos^m x .\sin^p x .dx=x^{n+1} .\cos^m x\sin^p x-p\int x^{n+1} .\cos^{m+1} x\sin^{p-1} x .dx+m\int x^{n+1} .\cos^{m-1} x .\sin^{p+1} x .dx$$

Es ist also

$$\int x^{n+1} \cdot \cos^{m-1} x \cdot \sin^{p+1} x \cdot dx = -\frac{x^{n+1} \cdot \cos^m x \sin^p x}{m} + \left(\frac{n+1}{m}\right)\int x^n \cos^m x \sin^p x \, dx + \left(\frac{p}{m}\right)\int x^{n+1} \cdot \cos^{m+1} x \sin^{p-1} x \cdot dx$$

oder, wenn ich $n+1$ in n, $m-1$ in m und $p+1$ in p verwandle,

I) $$\int x^n \cdot \cos^m x \sin^p x \, dx = -\frac{x^n \cdot \cos^{m+1} x \cdot \sin^{p-1} x}{m+1} + \left(\frac{n}{m+1}\right)\int x^{n-1} \cdot \cos^{m+1} x \cdot \sin^{p-1} x \cdot dx + \left(\frac{p-1}{m+1}\right)\int x^n \cdot \cos^{m+2} x \sin^{p-2} x \cdot dx$$

Wenn $p = 1$, so ist

1) $$\int x^n \cdot \cos^m x \cdot \sin x \cdot dx = -\frac{x^n \cdot \cos^{m+1} x}{m+1} + \left(\frac{n}{m+1}\right)\int x^{n-1} \cdot \cos^{m+1} x \cdot dx,$$ wobei sich das $\int x^{n-1} \cdot \cos^{m+1} x \cdot dx$ leicht aus dem $\int x^n \cdot \cos^m x \cdot dx$ entnehmen lässt.

Wenn $p = 2$, so entsteht

$$\int x^n \cdot \cos^m x \cdot \sin^2 x \, dx = -\frac{x^n \cdot \cos^{m+1} x \cdot \sin x}{m+1} + \left(\frac{n}{m+1}\right)\int x^{n-1} \cdot \cos^{m+1} x \cdot \sin x \, dx + \left(\frac{1}{m+1}\right)\int x^n \cdot \cos^{m+2} x \cdot dx$$

Nun ist $\int x^{n-1} \cdot \cos^{m+1} x \cdot \sin x \cdot dx = -\frac{x^{n-1} \cdot \cos^{m+2} x}{m+2} + \left(\frac{n-1}{m+2}\right)\int x^{n-2} \cdot \cos^{m+2} x \cdot dx$ und daher auch

$$\left(\frac{n}{m+1}\right)\int x^{n-1} \cdot \cos^{m+1} x \cdot \sin x \cdot dx = -\frac{n x^{n-1} \cdot \cos^{m+2} x}{(m+1)(m+2)} + \frac{n(n-1)}{(m+1)(m+2)}\int x^{n-2} \cdot \cos^{m+2} x \cdot dx.$$ Es ist folglich

2) $$\int x^n \cdot \cos^m x \cdot \sin^2 x \, dx = -\frac{x^n \cdot \cos^{m+1} x \cdot \sin x}{m+1} - \frac{n x^{n-1} \cdot \cos^{m+2} x}{(m+1)(m+2)} + \frac{n(n-1)}{(m+1)(m+2)}\int x^{n-2} \cdot \cos^{m+2} x \, dx + \left(\frac{1}{m+1}\right)\int x^n \cdot \cos^{m+2} x \cdot dx$$

In der Gleichung I. sei nun $p = 3$, dann entsteht

$$\int x^n \cdot \cos^m x \cdot \sin^3 x \, dx = -\frac{x^n \cdot \cos^{m+1} x \cdot \sin^2 x}{m+1} + \left(\frac{n}{m+1}\right)\int x^{n-1} \cdot \cos^{m+1} x \cdot \sin^2 x \, dx + \left(\frac{2}{m+1}\right)\int x^n \cdot \cos^{m+2} x \sin x \, dx$$

Nun ist $$\int x^{n-1} \cdot \cos^{m+1} x \cdot \sin^2 x \cdot dx = -\frac{x^{n-1} \cdot \cos^{m+2} x \cdot \sin x}{m+2} - \frac{(n-1) x^{n-2} \cdot \cos^{m+3} x}{(m+2)(m+3)} + \frac{(n-1)(n-2)}{(m+2)(m+3)}\int x^{n-3} \cos^{m+3} x \, dx$$

$$+ \left(\frac{1}{m+2}\right)\int x^{n-1} \cdot \cos^{m+3} x \cdot dx$$ und daher auch

$$\left(\frac{n}{m+1}\right)\int x^{n-1} \cdot \cos^{m+1} x \cdot \sin^2 x \, dx = -\frac{n x^{n-1} \cdot \cos^{m+2} x \cdot \sin x}{(m+1)(m+2)} - \frac{n(n-1) x^{n-2} \cdot \cos^{m+3} x}{(m+1)(m+2)(m+3)} + \frac{n(n-1)(n-2)}{(m+1)(m+2)(m+3)}\int x^{n-3} \cdot \cos^{m+3} x \cdot dx$$

$$+ \frac{n}{(m+1)(m+2)}\int x^{n-1} \cdot \cos^{m+3} x \cdot dx.$$ Ferner ist

$$\int x^n \cdot \cos^{m+2} x \cdot \sin x \cdot dx = -\frac{x^n \cos^{m+3} x}{m+3} + \left(\frac{n}{m+3}\right)\int x^{n-1} \cdot \cos^{m+3} x \cdot dx$$ und daher auch

$$\left(\frac{2}{m+1}\right)\int x^n \cdot \cos^{m+2} x \cdot \sin x \cdot dx = -\frac{2 x^n \cdot \cos^{m+3} x}{(m+1)(m+3)} + \frac{2n}{(m+1)(m+3)}\int x^{n-1} \cdot \cos^{m+3} x \cdot dx.$$ Es entsteht daher

$$\int x^n \cdot \cos^m x \cdot \sin^3 x \cdot dx = -\frac{x^n \cdot \cos^{m+1} x \cdot \sin^2 x}{m+1} - \frac{n x^{n-1} \cdot \cos^{m+2} x \sin x}{(m+1)(m+2)} - \frac{n(n-1) x^{n-2} \cdot \cos^{m+3} x}{(m+1)(m+2)(m+3)}$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{(m+1)(m+2)(m+3)}\int x^{n-3} \cdot \cos^{m+3} x \cdot dx + \frac{n}{(m+1)(m+2)}\int x^{n-1} \cdot \cos^{m+3} x \cdot dx - \frac{2 x^n \cos^{m+3} x}{(m+1)(m+3)}$$

$$+ \frac{2n}{(m+1)(m+3)}\int x^{n-1} \cdot \cos^{m+3} x \cdot dx$$ oder vereinfacht

3) $$\int x^n \cdot \cos^m x \sin^3 x \, dx = -\frac{x^n \cdot \cos^{m+1} x \cdot \sin^2 x}{m+1} - \frac{n x^{n-1} \cdot \cos^{m+2} x \cdot \sin x}{(m+1)(m+2)} - \frac{\left\{n(n-1) x^{n-2} + 2(m+2) x^n\right\} \cos^{m+3} x}{(m+1)(m+2)(m+3)}$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{(m+1)(m+2)(m+3)}\int x^{n-3} \cdot \cos^{m+3} x \, dx + \frac{n(3m+7)}{(m+1)(m+2)(m+3)}\int x^{n-1} \cdot \cos^{m+3} x \cdot dx$$

Es sei ferner in der Gleichung I. $p = 4$, dann entsteht

$$\int x^n . \cos^m x . \sin^4 x \, dx = - \frac{x^n . \cos^{m+1} x . \sin^3 x}{m+1} + \left(\frac{n}{m+1}\right)\int x^{n-1} . \cos^{m+1} x . \sin^3 x \, dx + \left(\frac{3}{m+1}\right)\int x^n . \cos^{m+2} x . \sin^2 x \, dx$$

Nun ist aber

$$\int x^{n-1} . \cos^{m+1} x . \sin^3 x . dx = - \frac{x^{n-1} . \cos^{m+2} x \sin^2 x}{m+2} - \frac{(n-1) x^{n-2} . \cos^{m+3} x . \sin x}{(m+2)(m+3)} - \frac{\left\{(n-1)(n-2) x^{n-3} + 2(m+3) x^{n-1}\right\} \cos^{m+4} x}{(m+2)(m+3)(m+4)}$$

$$+ \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{(m+2)(m+3)(m+4)}\int x^{n-4} . \cos^{m+4} x . dx + \frac{(n-1)(3m+10)}{(m+2)(m+3)(m+4)}\int x^{n-2} . \cos^{m+4} x . dx$$ daher auch

$$\left(\frac{n}{m+1}\right)\int x^{n-1} . \cos^{m+1} x . \sin^3 x \, dx = - \frac{n x^{n-1} . \cos^{m+2} x . \sin^2 x}{(m+1)(m+2)} - \frac{n(n-1) x^{n-2} . \cos^{m+3} x . \sin x}{(m+1)(m+2)(m+3)} - \frac{n\left\{(n-1)(n-2) x^{n-3} + 2(m+3) x^{n-1}\right\} \cos^{m+4} x}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)}$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)}\int x^{n-4} . \cos^{m+4} x . dx + \frac{n(n-1)(3m+10)}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)}\int x^{n-2} . \cos^{m+4} x . dx$$

Ferner ist

$$\int x^n . \cos^{m+2} x . \sin^2 x . dx = - \frac{x^n . \cos^{m+3} x . \sin x}{m+3} - \frac{n x^{n-1} . \cos^{m+4} x}{(m+3)(m+4)} + \frac{n(n-1)}{(m+3)(m+4)}\int x^{n-2} . \cos^{m+4} x . dx$$

$$+ \left(\frac{1}{m+3}\right)\int x^n . \cos^{m+4} x . dx,$$ daher auch

$$\left(\frac{3}{m+1}\right)\int x^n . \cos^{m+2} x . \sin^2 x . dx = - \frac{3 x^n . \cos^{m+3} x . \sin x}{(m+1)(m+3)} - \frac{3 n x^{n-1} . \cos^{m+4} x}{(m+1)(m+3)(m+4)} + \frac{3n(n-1)}{(m+1)(m+3)(m+4)}\int x^{n-2} . \cos^{m+4} x . dx$$

$$+ \frac{3}{(m+1)(m+3)}\int x^n . \cos^{m+4} x . dx.$$ Es entsteht daher

$$\int x^n . \cos^m x . \sin^4 x . dx = - \frac{x^n . \cos^{m+1} x . \sin^3 x}{m+1} - \frac{n x^{n-1} . \cos^{m+2} x . \sin^2 x}{(m+1)(m+2)} - \frac{n(n-1) x^{n-2} . \cos^{m+3} x \sin x}{(m+1)(m+2)(m+3)}$$

$$- \frac{n\left\{(n-1)(n-2) x^{n-3} + 2(m+3) x^{n-1}\right\} \cos^{m+4} x}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)}\int x^{n-4} . \cos^{m+4} x . dx + \frac{n(n-1)(3m+10)}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)}\int x^{n-2} . \cos^{m+4} x . dx$$

$$- \frac{3 x^n . \cos^{m+3} x . \sin x}{(m+1)(m+3)} - \frac{3 n x^{n-1} . \cos^{m+4} x}{(m+1)(m+3)(m+4)} + \frac{3n(n-1)}{(m+1)(m+3)(m+4)}\int x^{n-2} . \cos^{m+4} x . dx + \frac{3}{(m+1)(m+3)}\int x^n . \cos^{m+4} x . dx$$

oder vereinfacht

4) $$\underline{\int x^n . \cos^m x . \sin^4 x . dx} = - \frac{x^n . \cos^{m+1} x . \sin^3 x}{m+1} - \frac{n x^{n-1} . \cos^{m+2} x . \sin^2 x}{(m+1)(m+2)} - \frac{\left\{n(n-1) x^{n-2} + 3(m+2) x^n\right\} \cos^{m+3} x \sin x}{(m+1)(m+2)(m+3)}$$

$$- \frac{n\left\{(n-1)(n-2) x^{n-3} + (5m+12) x^{n-1}\right\} \cos^{m+4} x}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)}\int x^{n-4} . \cos^{m+4} x . dx$$

$$+ \frac{n(n-1)(6m+16)}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)}\int x^{n-2} . \cos^{m+4} x . dx + \frac{3}{(m+1)(m+3)}\int x^n . \cos^{m+4} x . dx$$

Es sei demnächst in der Gleichung I. $p = 5$, dann entsteht

$$\int x^n . \cos^m x . \sin^5 x \, dx = - \frac{x^n \cos^{m+1} x . \sin^4 x}{m+1} + \left(\frac{n}{m+1}\right)\int x^{n-1} . \cos^{m+1} x . \sin^4 x \, dx + \left(\frac{4}{m+1}\right)\int x^n . \cos^{m+2} x \sin^3 x . dx$$

Nun ist aber

$$\int x^{n-1} . \cos^{m+1} x . \sin^4 x . dx = - \frac{x^{n-1} . \cos^{m+2} x . \sin^3 x}{m+2} - \frac{(n-1) x^{n-2} . \cos^{m+3} x . \sin^2 x}{(m+2)(m+3)} - \frac{\left\{(n-1)(n-2) x^{n-3} + 3(m+3) x^{n-1}\right\} \cos^{m+4} x \sin x}{(m+2)(m+3)(m+4)}$$

$$- \frac{(n-1)\left\{(n-2)(n-3) x^{n-4} + (5m+17) x^{n-2}\right\} \cos^{m+5} x}{(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)}\int x^{n-5} . \cos^{m+5} x . dx$$

$$+ \frac{(n-1)(n-2)(6m+25)}{(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)}\int x^{n-3} . \cos^{m+5} x . dx + \frac{3}{(m+2)(m+4)}\int x^{n-1} . \cos^{m+5} x . dx$$ und daher auch

$$\left(\frac{n}{m+1}\right)\int x^{n-1}.\cos^{m+1}x.\sin^4 x\,dx = -\frac{nx^{n-1}.\cos^{m+2}x\sin^3 x}{(m+1)(m+2)} - \frac{n(n-1)x^{n-2}.\cos^{m+3}x.\sin^2 x}{(m+1)(m+2)(m+3)} - \frac{n\left\{(n-1)(n-2)x^{n-3}+3(m+3)x^{n-1}\right\}\cos^{m+4}x\sin x}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)}$$

$$-\frac{n(n-1)\left\{(n-2)(n-3)x^{n-4}+(5m+17)x^{n-2}\right\}\cos^{m+5}x}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)}\int x^{n-5}.\cos^{m+5}x.dx$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)(6m+22)}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)}\int x^{n-3}.\cos^{m+5}x.dx + \frac{5n}{(m+1)(m+2)(m+4)}\int x^{n-1}.\cos^{m+5}x.dx$$

Ferner ist

$$\int x^n.\cos^{m+2}x.\sin^3 x.dx = -\frac{x^n.\cos^{m+3}x.\sin^2 x}{m+3} - \frac{nx^{n-1}.\cos^{m+4}x.\sin x}{(m+3)(m+4)} - \frac{\left\{n(n-1)x^{n-2}+2(m+4)x^n\right\}\cos^{m+5}x}{(m+3)(m+4)(m+5)}$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{(m+3)(m+4)(m+5)}\int x^{n-3}.\cos^{m+5}x.dx + \frac{n(3m+13)}{(m+3)(m+4)(m+5)}\int x^{n-1}.\cos^{m+5}x.dx,$$ daher auch

$$\left(\frac{4}{m+1}\right)\int x^n.\cos^{m+2}x.\sin^3 x\,dx = -\frac{4x^n.\cos^{m+3}x\sin^2 x}{(m+1)(m+3)} - \frac{4nx^{n-1}.\cos^{m+4}x\sin x}{(m+1)(m+3)(m+4)} - \frac{4\left\{n(n-1)x^{n-2}+2(m+4)x^n\right\}\cos^{m+5}x}{(m+1)(m+3)(m+4)(m+5)}$$

$$+\frac{4n(n-1)(n-2)}{(m+1)(m+3)(m+4)(m+5)}\int x^{n-3}.\cos^{m+5}x.dx + \frac{4n(3m+13)}{(m+1)(m+3)(m+4)(m+5)}\int x^{n-1}.\cos^{m+5}x\,dx$$

Es entsteht also:

$$\int x^n.\cos^m x.\sin^5 x\,dx = -\frac{x^n.\cos^{m+1}x.\sin^4 x}{m+1} - \frac{nx^{n-1}.\cos^{m+2}x\sin^3 x}{(m+1)(m+2)} - \frac{n(n-1)x^{n-2}.\cos^{m+3}x.\sin^2 x}{(m+1)(m+2)(m+3)}$$

$$-\frac{n\left\{(n-1)(n-2)x^{n-3}+3(m+3)x^{n-1}\right\}\cos^{m+4}x.\sin x}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)} - \frac{n(n-1)\left\{(n-2)(n-3)x^{n-4}+(5m+17)x^{n-2}\right\}\cos^{m+5}x}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)}$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)}\int x^{n-5}.\cos^{m+5}x\,dx + \frac{n(n-1)(n-2)(6m+22)}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)}\int x^{n-3}.\cos^{m+5}x.dx$$

$$+\frac{5n}{(m+1)(m+2)(m+4)}\int x^{n-1}.\cos^{m+5}x.dx - \frac{4x^n\cos^{m+3}x\sin^2 x}{(m+1)(m+3)} - \frac{4nx^{n-1}.\cos^{m+4}x.\sin x}{(m+1)(m+3)(m+4)} - \frac{4\left\{n(n-1)x^{n-2}+2(m+4)x^n\right\}\cos^{m+5}x}{(m+1)(m+3)(m+4)(m+5)}$$

$$+\frac{4n(n-1)(n-2)}{(m+1)(m+3)(m+4)(m+5)}\int x^{n-3}.\cos^{m+5}x.dx + \frac{4n(3m+13)}{(m+1)(m+3)(m+4)(m+5)}\int x^{n-1}.\cos^{m+5}x.dx,$$ oder geordnet

5) $$\underline{\int x^n.\cos^m x.\sin^5 x.dx} = -\frac{x^n.\cos^{m+1}x.\sin^4 x}{m+1} - \frac{nx^{n-1}.\cos^{m+2}x.\sin^3 x}{(m+1)(m+2)} - \frac{\left\{n(n-1)x^{n-2}+4(m+2)x^n\right\}\cos^{m+3}x\sin^2 x}{(m+1)(m+2)(m+3)}$$

$$-\frac{n\left\{(n-1)(n-2)x^{n-3}+(7m+17)x^{n-1}\right\}\cos^{m+4}x\sin x}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)} - \frac{\left\{n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}+n(n-1)(9m+25)x^{n-2}+8(m+4)(m+2)x^n\right\}\cos^{m+5}x}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)}$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)}\int x^{n-5}.\cos^{m+5}x.dx + \frac{n(n-1)(n-2)(10m+50)}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)}\int x^{n-3}.\cos^{m+5}x.dx$$

$$+\frac{n\{5(m+3)(m+5)+4(m+2)(3m+13)\}}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)}\int x^{n-1}.\cos^{m+5}x.dx$$

Es sei schliesslich noch in der Gleichung I. $p = 6$, so entsteht

$$\int x^n.\cos^m x.\sin^6 x.dx = -\frac{x^n.\cos^{m+1}x.\sin^5 x}{m+1} + \left(\frac{n}{m+1}\right)\int x^{n-1}.\cos^{m+1}x.\sin^5 x.dx + \left(\frac{5}{m+1}\right)\int x^n.\cos^{m+2}x.\sin^4 x.dx$$

Nun ist aber

$$\int x^{n-1}.\cos^{m+1}x.\sin^5 x.dx = -\frac{x^{n-1}.\cos^{m+2}x.\sin^4 x}{m+2} - \frac{(n-1)x^{n-2}.\cos^{m+3}x.\sin^3 x}{(m+2)(m+3)} - \frac{\left\{(n-1)(n-2)x^{n-3}+4(m+3)x^{n-1}\right\}\cos^{m+4}x.\sin^2 x}{(m+2)(m+3)(m+4)}$$

$$-\frac{(n-1)\left\{(n-2)(n-3)x^{n-4}+(7m+24)x^{n-2}\right\}\cos^{m+5}x.\sin x}{(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)} - \frac{\left\{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)x^{n-5}+(n-1)(n-2)(9m+34)x^{n-3}+8(m+5)(m+3)x^{n-1}\right\}\cos^{m+6}x}{(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)}$$

$$+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)}\int x^{n-6}.\cos^{m+6}x.dx + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(10m+40)}{(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)}\int x^{n-4}.\cos^{m+6}x.dx$$

$$+\frac{(n-1)\{3(m+4)(m+6)+4(m+3)(3m+16)\}}{(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)}\int x^{n-2}.\cos^{m+6}x.dx$$ und daher auch

$$\left(\frac{n}{m+1}\right)\int x^{n-1} \cdot \cos^{m+1} x \cdot \sin^5 x \cdot dx = -\frac{n x^{n-1} \cdot \cos^{m+2} x \cdot \sin^4 x}{(m+1)(m+2)} - \frac{n(n-1) x^{n-2} \cdot \cos^{m+3} x \cdot \sin^3 x}{(m+1)(m+2)(m+3)} - \frac{n\left\{(n-1)(n-2) x^{n-3} + 4(m+3) x^{n-1}\right\} \cos^{m+4} x \sin^2 x}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)}$$

$$- \frac{n(n-1)\left\{(n-2)(n-3) x^{n-4} + (7m+24) x^{n-2}\right\} \cos^{m+5} x \cdot \sin x}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)} - \frac{n\left\{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) x^{n-5} + (n-1)(n-2)(9m+34) x^{n-3} + 8(m+5)(m+3) x^{n-1}\right\} \cos^{m+6} x}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)}$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)}\int x^{n-6} \cdot \cos^{m+6} x \cdot dx + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(10m+40)}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)}\int x^{n-4} \cdot \cos^{m+6} x \cdot dx$$

$$+ \frac{n(n-1)\left\{3(m+4)(m+6) + 4(m+3)(3m+16)\right\}}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)}\int x^{n-2} \cdot \cos^{m+6} x \cdot dx$$

Ferner ist

$$\int x^n \cdot \cos^{m+2} x \cdot \sin^4 x \cdot dx = -\frac{x^n \cdot \cos^{m+3} x \sin^3 x}{m+3} - \frac{n x^{n-1} \cdot \cos^{m+4} x \cdot \sin^2 x}{(m+3)(m+4)} - \frac{\left\{n(n-1) x^{n-2} + 3(m+4) x^n\right\} \cos^{m+5} x \cdot \sin x}{(m+3)(m+4)(m+5)}$$

$$- \frac{n\left\{(n-1)(n-2) x^{n-3} + (5m+22) x^{n-1}\right\} \cos^{m+6} x}{(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)}\int x^{n-4} \cdot \cos^{m+6} x \cdot dx$$

$$+ \frac{n(n-1)(6m+28)}{(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)}\int x^{n-2} \cdot \cos^{m+6} x \cdot dx + \frac{3}{(m+3)(m+5)}\int x^n \cdot \cos^{m+6} x \cdot dx$$ und daher auch

$$\left(\frac{5}{m+1}\right)\int x^n \cdot \cos^{m+2} x \cdot \sin^4 x \cdot dx = -\frac{5 x^n \cos^{m+3} x \cdot \sin^3 x}{(m+1)(m+3)} - \frac{5 n x^{n-1} \cdot \cos^{m+4} x \cdot \sin^2 x}{(m+1)(m+3)(m+4)} - \frac{5\left\{n(n-1) x^{n-2} + 3(m+4) x^n\right\} \cos^{m+5} x \sin x}{(m+1)(m+3)(m+4)(m+5)}$$

$$- \frac{5n\left\{(n-1)(n-2) x^{n-3} + (5m+22) x^{n-1}\right\} \cos^{m+6} x}{(m+1)(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)} + \frac{5n(n-1)(n-2)(n-3)}{(m+1)(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)}\int x^{n-4} \cdot \cos^{m+6} x \cdot dx$$

$$+ \frac{5n(n-1)(6m+28)}{(m+1)(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)}\int x^{n-2} \cdot \cos^{m+6} x \cdot dx + \frac{15}{(m+1)(m+3)(m+5)}\int x^n \cdot \cos^{m+6} x \cdot dx$$

Es entsteht daher:

$$\int x^n \cdot \cos^m x \cdot \sin^6 x \, dx = -\frac{x^n \cdot \cos^{m+1} x \cdot \sin^5 x}{m+1} - \frac{n x^{n-1} \cdot \cos^{m+2} x \sin^4 x}{(m+1)(m+2)} - \frac{n(n-1) x^{n-2} \cdot \cos^{m+3} x \sin^3 x}{(m+1)(m+2)(m+3)}$$

$$- \frac{n\left\{(n-1)(n-2) x^{n-3} + 4(m+3) x^{n-1}\right\} \cos^{m+4} x \sin^2 x}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)} - \frac{n(n-1)\left\{(n-2)(n-3) x^{n-4} + (7m+24) x^{n-2}\right\} \cos^{m+5} x \sin x}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)}$$

$$- \frac{n\left\{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) x^{n-5} + (n-1)(n-2)(9m+34) x^{n-3} + 8(m+5)(m+3) x^{n-1}\right\} \cos^{m+6} x}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)}$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)}\int x^{n-6} \cdot \cos^{m+6} x \cdot dx + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(10m+40)}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)}\int x^{n-4} \cdot \cos^{m+6} x \cdot dx$$

$$+ \frac{n(n-1)\left\{3(m+4)(m+6) + 4(m+3)(3m+16)\right\}}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)}\int x^{n-2} \cdot \cos^{m+6} x \cdot dx - \frac{5 x^n \cdot \cos^{m+3} x \sin^3 x}{(m+1)(m+3)} - \frac{5 n x^{n-1} \cdot \cos^{m+4} x \cdot \sin^2 x}{(m+1)(m+3)(m+4)}$$

$$- \frac{5\left\{n(n-1) x^{n-2} + 3(m+4) x^n\right\} \cos^{m+5} x \cdot \sin x}{(m+1)(m+3)(m+4)(m+5)} - \frac{5n\left\{(n-1)(n-2) x^{n-3} + (5m+22) x^{n-1}\right\} \cos^{m+6} x}{(m+1)(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)}$$

$$+ \frac{5n(n-1)(n-2)(n-3)}{(m+1)(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)}\int x^{n-4} \cdot \cos^{m+6} x \cdot dx + \frac{5n(n-1)(6m+28)}{(m+1)(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)}\int x^{n-2} \cdot \cos^{m+6} x \, dx + \frac{15}{(m+1)(m+3)(m+5)}\int x^n \cdot \cos^{m+6} x \, dx$$

oder geordnet:

$$6)\quad \int x^{n} . \cos^{m} x . \sin^{6} x . dx = -\frac{x^{n} . \cos^{m+1} x . \sin^{5} x}{m+1} - \frac{n x^{n-1} . \cos^{m+2} x . \sin^{4} x}{(m+1)(m+2)} - \frac{\{n(n-1)x^{n-2} + 5(m+2)x^{n}\}\cos^{m+3} x \sin^{3} x}{(m+1)(m+2)(m+3)}$$

$$-\frac{\{n(n-1)(n-2)x^{n-3} + n(9m+22)x^{n-1}\}\cos^{m+4} x \sin^{2} x}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)} - \frac{\{n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4} + n(n-1)(12m+34)x^{n-2} + 15(m+2)(m+4)x^{n}\}\cos^{m+5} x \sin x}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)}$$

$$-\frac{\{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)x^{n-5} + n(n-1)(n-2)(14m+44)x^{n-3} + n\{15(m+2)(m+4) + 10(m+2)(m+5) + 8(m+3)(m+5)\}x^{n-1}\}\cos^{m+6} x}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)}$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)}\int x^{n-6} . \cos^{m+6} x\, dx + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(15m+50)}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)}\int x^{n-4} . \cos^{m+6} x\, dx$$

$$+\frac{n(n-1)\{3(m+4)(m+6) + 4(m+3)(3m+16) + 5(m+2)(6m+28)\}}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)}\int x^{n-2} . \cos^{m+6} x . dx + \frac{15}{(m+1)(m+3)(m+5)}\int x^{n} . \cos^{m+6} x\, dx$$

Die gefundenen Integrale genügen, um mich nunmehr der Verallgemeinerung zuwenden zu können. Ich werde die Form dieser Integrale noch einmal übersichtlich zusammenstellen:

$$1)\quad \int x^{n} . \cos^{m} x . \sin x . dx = -A x^{n} . \cos^{m+1} x + B\int x^{n-1} . \cos^{m+1} x . dx$$

$$2)\quad \int x^{n} . \cos^{m} x . \sin^{2} x . dx = -C x^{n} . \cos^{m+1} x . \sin x - D x^{n-1} . \cos^{m+2} x + E\int x^{n-2} . \cos^{m+2} x . dx + F\int x^{n} . \cos^{m+2} x . dx$$

$$3)\quad \int x^{n} . \cos^{m} x . \sin^{3} x . dx = -G x^{n} . \cos^{m+1} x . \sin^{2} x - H x^{n-1} . \cos^{m+2} x . \sin x - \left(I x^{n-2} + K x^{n}\right)\cos^{m+3} x + L\int x^{n-3} . \cos^{m+3} x . dx$$
$$+ M\int x^{n-1} . \cos^{m+3} x . dx$$

$$4)\quad \int x^{n} . \cos^{m} x . \sin^{4} x . dx = -N x^{n} . \cos^{m+1} x . \sin^{3} x - O x^{n-1} . \cos^{m+2} x . \sin^{2} x - \left(P x^{n-2} + Q x^{n}\right)\cos^{m+3} x . \sin x$$
$$-\left(R x^{n-3} + S x^{n-1}\right)\cos^{m+4} x + T\int x^{n-4} . \cos^{m+4} x . dx + U\int x^{n-2} . \cos^{m+4} x . dx + V\int x^{n} . \cos^{m+4} x . dx$$

$$5)\quad \int x^{n} . \cos^{m} x . \sin^{5} x . dx = -A_{,} x^{n} . \cos^{m+1} x . \sin^{4} x - B_{,} x^{n-1} . \cos^{m+2} x . \sin^{3} x - \left(C_{,} x^{n-2} + D_{,} x^{n}\right)\cos^{m+3} x . \sin^{2} x$$
$$-\left(E_{,} x^{n-3} + F_{,} x^{n-1}\right)\cos^{m+4} x \sin x - \left(G_{,} x^{n-4} + H_{,} x^{n-2} + I_{,} x^{n}\right)\cos^{m+5} x + K_{,}\int x^{n-5} . \cos^{m+5} x . dx + L_{,}\int x^{n-3} . \cos^{m+5} x . dx + M_{,}\int x^{n-1} . \cos^{m+5} x . dx$$

$$6)\quad \int x^{n} . \cos^{m} x . \sin^{6} x . dx = -N_{,} x^{n} . \cos^{m+1} x . \sin^{5} x - O_{,} x^{n-1} . \cos^{m+2} x . \sin^{4} x - \left(P_{,} x^{n-2} + Q_{,} x^{n}\right)\cos^{m+3} x . \sin^{3} x$$
$$-\left(R_{,} x^{n-3} + S_{,} x^{n-1}\right)\cos^{m+4} x . \sin^{2} x - \left(T_{,} x^{n-4} + U_{,} x^{n-2} + V_{,} x^{n}\right)\cos^{m+5} x . \sin x - \left(A_{,,} x^{n-5} + B_{,,} x^{n-3} + C_{,,} x^{n-1}\right)\cos^{m+6} x$$
$$+ D_{,,}\int x^{n-6} . \cos^{m+6} x . dx + E_{,,}\int x^{n-4} . \cos^{m+6} x . dx + F_{,,}\int x^{n-2} . \cos^{m+6} x . dx + G_{,,}\int x^{n} . \cos^{m+6} x . dx$$

Das $\int x^{n} . \cos^{m} x . \sin^{p} x\, dx$ ist also auf das $\int x^{n} . \cos^{m} x\, dx$ reducirt. Die Reductionsintegrale beginnen bei $\int x^{n} . \cos^{m} x . \sin^{6} x\, dx$ mit $\int x^{n} . \cos^{m+6} x . dx$ und setzen sich, während die Potenzen von x dabei stets um 2 Grad fallen, bis $\int x^{n-6} . \cos^{m+6} x . dx$ fort; bei $\int x^{n} . \cos^{m} x \sin^{4} x\, dx$ sind es die Integrale von $\int x^{n} . \cos^{m+4} x . dx$ bis zu $\int x^{n-4} . \cos^{m+4} x . dx$; bei $\int x^{n} . \cos^{m} x \sin^{2} x\, dx$ von $\int x^{n} . \cos^{m+2} x . dx$ bis zu $\int x^{n-2} . \cos^{m+2} x . dx$. Bei $\int x^{n} . \cos^{m} x . \sin^{p} x\, dx$, wenn p gerade, werden sie daher von folgender Form sein $\int x^{n} . \cos^{m+p} x\, dx$, $\int x^{n-2} . \cos^{m+p} x\, dx$, $\int x^{n-4} . \cos^{m+p} x\, dx$ . . . bis zu $\int x^{n-p} . \cos^{m+p} x\, dx$. Bei $\int x^{n} . \cos^{m} x . \sin^{5} x\, dx$ beginnen sie dagegen mit $\int x^{n-1} . \cos^{m+5} x . dx$ und setzen sich fort bis $\int x^{n-5} . \cos^{m+5} x . dx$; bei $\int x^{n} . \cos^{m} x \sin^{3} x . dx$ sind es die Integrale von $\int x^{n-1} . \cos^{m+3} x . dx$ bis $\int x^{n-3} . \cos^{m+3} x . dx$; bei $\int x^{n} . \cos^{m} x \sin x . dx$ ist es nur das $\int x^{n-1} . \cos^{m+1} x . dx$. Bei $\int x^{n} . \cos^{m} x \sin^{p} x\, dx$, wenn p ungerade, werden daher die Reductionsintegrale von der Form sein $\int x^{n-1} . \cos^{m+p} x\, dx$, $\int x^{n-3} . \cos^{m+p} x\, dx$, $\int x^{n-5} . \cos^{m+p} x\, dx$ . . . . . bis zu $\int x^{n-p} . \cos^{m+p} x . dx$.

Dieses letztere $\int x^{n-p} \cdot \cos^{m+p} x \, dx$ ist also in der Reihe der Reductionsintegrale das letzte, wie auch durch das $\int x^{n} \cdot \cos^{m} x \cdot \sin x \cdot dx$ bestätigt wird. Die Potenzen von $\sin x$ in den entwickelten Integralen beginnen mit einem um 1 niedrigeren Exponenten als die Potenzen von $\sin x$ auf der linken Seite der Gleichungen, und fallen stets um 1 Grad; mit den Potenzen von $\cos x$ verhält es sich gerade umgekehrt. Die Reductionsintegrale schliessen sich dem Gliede an, welches keine Potenz von $\sin x$ mehr enthält, und steht zu erwarten, dass die Coëfficienten dieser Integrale auch ihrerseits zu den Coëfficienten, bis zu welchen man im Lauf der Entwickelung gelangt ist, in gewissen Beziehungen stehn werden. Jedenfalls können die Coëfficienten dieser Reductionsintegrale im Allgemeinen nicht Null sein, da $\int x^{n} \cdot \cos^{m} x \cdot \sin^{p} x \, dx$ auf eben diese Integrale von der Form $\int x^{n} \cdot \cos^{m} x \cdot dx$ reducirt ist, daher dieselben in der Entwickelung des $\int x^{n} \cdot \cos^{m} x \cdot \sin^{p} x \, dx$ nicht fehlen können. Das 3te und 4te Glied des entwickelten $\int x^{n} \cdot \cos^{m} x \cdot \sin^{p} x \, dx$ sind mit 2gliedrigen Summen multiplicirt, deren Potenzen um 2 Grad verschieden sind; die eine Summe enthält die Potenzen x^{n} und x^{n-2}, die andere x^{n-1} und x^{n-3}: indessen findet diese Multiplikation nur statt, wenn die Beschaffenheit des p sie zulässt: denn ist $p = 3$, so ist bereits das 3te Glied ohne Potenz von $\sin x$, und müssen folglich die Reductionsintegrale, mit $\int x^{n-1} \cdot \cos^{m+p} x \, dx$ anfangend, sich sogleich daran anschliessen. Das 5te und 6te Glied sind, soweit die Beschaffenheit des p es gestattet, mit 3gliedrigen Summen multiplicirt; das 7te und 8te Glied werden daher wahrscheinlich mit 4gliedrigen Summen multiplicirt sein u. s. w. Es möge nun sein:

$$\int x^{n} \cdot \cos^{m} x \cdot \sin^{p} x \, dx = - A x^{n} \cdot \cos^{m+1} x \cdot \sin^{p-1} x - B x^{n-1} \cdot \cos^{m+2} x \cdot \sin^{p-2} x - \left(C x^{n} + D x^{n-2}\right) \cos^{m+3} x \sin^{p-3} x - \left(E x^{n-1} + F x^{n-3}\right) \cos^{m+4} x \sin^{p-4} x$$
$$- \left(G x^{n} + H x^{n-2} + I x^{n-4}\right) \cos^{m+5} x \sin^{p-5} x - \left(K x^{n-1} + L x^{n-3} + M x^{n-5}\right) \cos^{m+6} x \cdot \sin^{p-6} x$$
$$- \left(N x^{n} + O x^{n-2} + P x^{n-4} + Q x^{n-6}\right) \cos^{m+7} x \sin^{p-7} x - \left(R x^{n-1} + S x^{n-3} + T x^{n-5} + U x^{n-7}\right) \cos^{m+8} x \cdot \sin^{p-8} x$$
$$- \left(A_{,} x^{n} + B_{,} x^{n-2} + C_{,} x^{n-4} + D_{,} x^{n-6} + E_{,} x^{n-8}\right) \cos^{m+9} x \sin^{p-9} x - \left(F_{,} x^{n-1} + G_{,} x^{n-3} + H_{,} x^{n-5} + I_{,} x^{n-7} + K_{,} x^{n-9}\right) \cos^{m+10} x \sin^{p-10} x$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \begin{cases} \text{wenn } p \text{ ungerade } a \int x^{n-1} \cdot \cos^{m+p} x \, dx + b \int x^{n-3} \cdot \cos^{m+p} x \, dx + c \int x^{n-5} \cdot \cos^{m+p} x \, dx \; \ldots\ldots + f \int x^{n-p} \cdot \cos^{m+p} x \, dx \\ \text{wenn } p \text{ gerade } a_{,} \int x^{n} \cdot \cos^{m+p} x \, dx + b_{,} \int x^{n-2} \cdot \cos^{m+p} x \, dx + c_{,} \int x^{n-4} \cdot \cos^{m+p} x \, dx \; \ldots\ldots + f_{,} \int x^{n-p} \cdot \cos^{m+p} x \, dx \end{cases}$$
$$+ C.$$

dann ergiebt die Differenziation dieser Gleichung, die ich indess nur soweit ausführen werde, als die Bestimmung der Coëfficienten bis zu $K_{,}$ erfordert:

$$x^{n} \cdot \cos^{m} x \cdot \sin^{p} x = - A x^{0} \cdot \cos^{m+1} x \cdot (p-1) \sin^{p-2} x \cdot \cos x + A x^{n} \cdot \sin^{p-1} x \, (m+1) \cos^{m} x \sin x - A \cos^{m+1} x \sin^{p-1} x \, (n x^{n-1})$$
$$- B x^{n-1} \cdot \cos^{m+2} x \cdot (p-2) \sin^{p-3} x \cdot \cos x + B x^{n-1} \cdot \sin^{p-2} x \, (m+2) \cos^{m+1} x \sin x - B \cos^{m+2} x \sin^{p-2} x \, (n-1) x^{n-2}$$
$$- \left(C x^{n} + D x^{n-2}\right) \cos^{m+3} x \, (p-3) \sin^{p-4} x \cdot \cos x + \left(C x^{n} + D x^{n-2}\right) \sin^{p-3} x \, (m+3) \cos^{m+2} x \sin x - \cos^{m+3} x \sin^{p-3} x \left\{C n x^{n-1} + D (n-2) x^{n-3}\right\}$$
$$- \left(E x^{n-1} + F x^{n-3}\right) \cos^{m+4} x \, (p-4) \sin^{p-5} x \cdot \cos x + \left(E x^{n-1} + F x^{n-3}\right) \sin^{p-4} x \, (m+4) \cos^{m+3} x \sin x - \cos^{m+4} x \sin^{p-4} x \left\{E (n-1) x^{n-2} + F (n-3) x^{n-4}\right\}$$
$$- \left(G x^{n} + H x^{n-2} + I x^{n-4}\right) \cos^{m+5} x \, (p-5) \sin^{p-6} x \cdot \cos x + \left(G x^{n} + H x^{n-2} + I x^{n-4}\right) \sin^{p-5} x \, (m+5) \cos^{m+4} x \cdot \sin x$$
$$- \cos^{m+5} x \cdot \sin^{p-5} x \left\{G n x^{n-1} + H (n-2) x^{n-3} + I (n-4) x^{n-5}\right\} - \left(K x^{n-1} + L x^{n-3} + M x^{n-5}\right) \cos^{m+6} x \, (p-6) \sin^{p-7} x \cdot \cos x$$

$$+\left(Kx^{n-1}+Lx^{n-3}+Mx^{n-5}\right)\sin^{p-6}x\,(m+6)\cos^{m+5}x\sin x-\cos^{m+6}x\sin^{p-6}x\left\{K(n-1)x^{n-2}+L(n-3)x^{n-4}+M(n-5)x^{n-6}\right\}$$

$$-\left(Nx^{n}+Ox^{n-2}+Px^{n-4}+Qx^{n-6}\right)\cos^{m+7}x\,(p-7)\sin^{p-8}x\,.\cos x+\left(Nx^{n}+Ox^{n-2}+Px^{n-4}+Qx^{n-6}\right)\sin^{p-7}x\,(m+7)\cos^{m+6}x\sin x$$

$$-\cos^{m+7}x\sin^{p-7}x\left\{Nnx^{n-1}+O(n-2)x^{n-3}+P(n-4)x^{n-5}+Q(n-6)x^{n-7}\right\}-\left(Rx^{n-1}+Sx^{n-3}+Tx^{n-5}+Ux^{n-7}\right)\cos^{m+8}x\,(p-8)\sin^{p-9}x\cos x$$

$$+\left(Rx^{n-1}+Sx^{n-3}+Tx^{n-5}+Ux^{n-7}\right)\sin^{p-8}x\,(m+8)\cos^{m+7}x\sin x-\cos^{m+8}x\sin^{p-8}x\left\{R(n-1)x^{n-2}+S(n-3)x^{n-4}+T(n-5)x^{n-6}+U(n-7)x^{n-8}\right\}$$

$$-\left(A_1x^{n}+B_1x^{n-2}+C_1x^{n-4}+D_1x^{n-6}+E_1x^{n-8}\right)\cos^{m+9}x\,(p-9)\sin^{p-10}x\cos x$$

$$+\left(A_1x^{n}+B_1x^{n-2}+C_1x^{n-4}+D_1x^{n-6}+E_1x^{n-8}\right)\sin^{p-9}x\,(m+9)\cos^{m+8}x\sin x$$

$$-\cos^{m+9}x\,.\sin^{p-9}x\left\{A_1nx^{n-1}+B_1(n-2)x^{n-3}+C_1(n-4)x^{n-5}+D_1(n-6)x^{n-7}+E_1(n-8)x^{n-9}\right\}$$

$$-\left(F_1x^{n-1}+G_1x^{n-3}+H_1x^{n-5}+I_1x^{n-7}+K_1x^{n-9}\right)\cos^{m+10}x\,(p-10)\sin^{p-11}x\,.\cos x$$

$$+\left(F_1x^{n-1}+G_1x^{n-3}+H_1x^{n-5}+I_1x^{n-7}+K_1x^{n-9}\right)\sin^{p-10}x\,(m+10)\cos^{m+9}x\,.\sin x$$

$$-\cos^{m+10}x\,.\sin^{p-10}x\left\{F_1(n-1)x^{n-2}+G_1(n-3)x^{n-4}+H_1(n-5)x^{n-6}+I_1(n-7)x^{n-8}+K_1(n-9)x^{n-10}\right\}.$$

$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

oder geordnet:

$$x^{n}.\cos^{m}x\sin^{p}x=A(m+1)x^{n}.\cos^{m}x\sin^{p}x-An\,.\,x^{n-1}.\cos^{m+1}x\sin^{p-1}x-A(p-1)x^{n}.\cos^{m+2}x\sin^{p-2}x$$

$$+B(m+2)x^{n-1}.\cos^{m+1}x\sin^{p-1}x+C(m+3)x^{n}.\cos^{m+2}x\sin^{p-2}x$$

$$-B(n-1)x^{n-2}.\cos^{m+2}x\sin^{p-2}x-B(p-2)x^{n-1}.\cos^{m+1}x\sin^{p-3}x-D(n-2)x^{n-3}.\cos^{m+3}x\sin^{p-3}x$$

$$+D(m+3)x^{n-2}.\cos^{m+2}x\sin^{p-2}x-Cn\,.\,x^{n-1}.\cos^{m+3}x\sin^{p-3}x+F(m+4)x^{n-3}.\cos^{m+3}x\sin^{p-3}x$$

$$+E(m+4)x^{n-1}.\cos^{m+3}x\sin^{p-3}x$$

$$-C(p-3)x^{n}.\cos^{m+4}x\sin^{p-4}x-D(p-3)x^{n-2}.\cos^{m+4}x\sin^{p-4}x+I(m+5)x^{n-4}.\cos^{m+4}x\sin^{p-4}x$$

$$+G(m+5)x^{n}.\cos^{m+4}x\sin^{p-4}x-E(n-1)x^{n-2}.\cos^{m+4}x\sin^{p-4}x-F(n-3)x^{n-4}.\cos^{m+4}x\sin^{p-4}x$$

$$+H(m+5)x^{n-2}.\cos^{m+4}x\sin^{p-4}x$$

$$-E(p-4)x^{n-1}.\cos^{m+5}x\sin^{p-5}x-F(p-4)x^{n-3}.\cos^{m+5}x\sin^{p-5}x-I(n-4)x^{n-5}.\cos^{m+5}x\sin^{p-5}x$$

$$-Gn\,x^{n-1}.\cos^{m+5}x\sin^{p-5}x-H(n-2)x^{n-3}.\cos^{m+5}x\sin^{p-5}x+M(m+6)x^{n-5}.\cos^{m+5}x\sin^{p-5}x$$

$$+K(m+6)x^{n-1}.\cos^{m+5}x\sin^{p-5}x+L(m+6)x^{n-3}.\cos^{m+5}x\sin^{p-5}x$$

$$-G(p-5)x^{n}.\cos^{m+6}x\sin^{p-6}x-H(p-5)x^{n-2}.\cos^{m+6}x\sin^{p-6}x-I(p-5)x^{n-4}.\cos^{m+6}x\sin^{p-6}x$$

$$+N(m+7)x^{n}.\cos^{m+6}x\sin^{p-6}x-K(n-1)x^{n-2}.\cos^{m+6}x\sin^{p-6}x-L(n-3)x^{n-4}.\cos^{m+6}x\sin^{p-6}x$$

$$+O(m+7)x^{n-2}.\cos^{m+6}x\sin^{p-6}x+P(m+7)x^{n-4}.\cos^{m+6}x\sin^{p-6}x$$

$$-M(n-5)x^{n-6}\cdot\cos^{m+6}x\,\sin^{p-6}x-K(p-6)x^{n-1}\cdot\cos^{m+7}x\,\sin^{p-7}x-L(p-6)x^{n-3}\cdot\cos^{m+7}x\,\sin^{p-7}x$$
$$+Q(m+7)x^{n-6}\cdot\cos^{m+6}x\,\sin^{p-6}x-N\,n\,x^{n-1}\cdot\cos^{m+7}x\,\sin^{p-7}x-O(n-2)x^{n-3}\cdot\cos^{m+7}x\,\sin^{p-7}x$$
$$+R(m+8)x^{n-1}\cdot\cos^{m+7}x\,\sin^{p-7}x+S(m+8)x^{n-3}\cdot\cos^{m+7}x\,\sin^{p-7}x$$

$$-M(p-6)x^{n-5}\cdot\cos^{m+7}x\,\sin^{p-7}x-Q(n-6)x^{n-7}\cdot\cos^{m+7}x\,\sin^{p-7}x-N(p-7)x^{n}\cdot\cos^{m+8}x\,\sin^{p-8}x$$
$$-P(n-4)x^{n-5}\cdot\cos^{m+7}x\,\sin^{p-7}x+U(m+8)x^{n-7}\cdot\cos^{m+7}x\,\sin^{p-7}x+A_{,}(m+9)x^{n}\cdot\cos^{m+8}x\,\sin^{p-8}x$$
$$+T(m+8)x^{n-3}\cdot\cos^{m+7}x\,\sin^{p-7}x$$

$$-O(p-7)x^{n-2}\cdot\cos^{m+8}x\,\sin^{p-8}x-P(p-7)x^{n-4}\cdot\cos^{m+8}x\,\sin^{p-8}x-Q(p-7)x^{n-6}\cdot\cos^{m+8}x\,\sin^{p-8}x$$
$$-R(n-1)x^{n-2}\cdot\cos^{m+8}x\,\sin^{p-8}x-S(n-3)x^{n-4}\cdot\cos^{m+8}x\,\sin^{p-8}x-T(n-5)x^{n-6}\cdot\cos^{m+8}x\,\sin^{p-8}x$$
$$+B_{,}(m+9)x^{n-2}\cdot\cos^{m+8}x\,\sin^{p-8}x+C_{,}(m+9)x^{n-4}\cdot\cos^{m+8}x\,\sin^{p-8}x+D_{,}(m+9)x^{n-6}\cdot\cos^{m+8}x\,\sin^{p-8}x$$

$$-U(n-7)x^{n-8}\cdot\cos^{m+8}x\,\sin^{p-8}x-R(p-8)x^{n-1}\cdot\cos^{m+9}x\,\sin^{p-9}x-S(p-8)x^{n-3}\cdot\cos^{m+9}x\,\sin^{p-9}x$$
$$+E_{,}(m+9)x^{n-8}\cdot\cos^{m+8}x\,\sin^{p-8}x-A_{,}\,n\,x^{n-1}\cdot\cos^{m+9}x\,\sin^{p-9}x-B_{,}(n-2)x^{n-3}\cdot\cos^{m+9}x\,\sin^{p-9}x$$
$$+F_{,}(m+10)x^{n-1}\cdot\cos^{m+9}x\,\sin^{p-9}x+G_{,}(m+10)x^{n-3}\cdot\cos^{m+9}x\,\sin^{p-9}x$$

$$-T(p-8)x^{n-5}\cdot\cos^{m+9}x\,\sin^{p-9}x-U(p-8)x^{n-7}\cdot\cos^{m+9}x\,\sin^{p-9}x-E_{,}(n-8)x^{n-9}\cdot\cos^{m+9}x\,\sin^{p-9}x$$
$$-C_{,}(n-4)x^{n-5}\cdot\cos^{m+9}x\,\sin^{p-9}x-D_{,}(n-6)x^{n-7}\cdot\cos^{m+9}x\,\sin^{p-9}x+K_{,}(m+10)x^{n-9}\cdot\cos^{m+9}x\,\sin^{p-9}x$$
$$+H_{,}(m+10)x^{n-5}\cdot\cos^{m+9}x\,\sin^{p-9}x+I_{,}(m+10)x^{n-7}\cdot\cos^{m+9}x\,\sin^{p-9}x$$
$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Es ergeben sich daher für die Coëfficienten folgende Bestimmungen:

1) $A(m+1)x^{n}\cdot\cos^{m}x\,\sin^{p}x=x^{n}\cdot\cos^{m}x\,\sin^{p}x$, daher $A=\frac{1}{m+1}$

2) $-An+B(m+2)=0$ oder $B=\frac{An}{m+2}$, daher $B=\frac{n}{(m+1)(m+2)}$

3) $C(m+3)-A(p-1)=0$ oder $C=\frac{A(p-1)}{m+3}$, daher $C=\frac{p-1}{(m+1)(m+3)}$

4) $D(m+3)-B(n-1)=0$ oder $D=\frac{B(n-1)}{m+3}$, daher $D=\frac{n(n-1)}{(m+1)(m+2)(m+3)}$

5) $-B(p-2)-Cn+E(m+4)=0$ oder $E=\frac{B(p-2)+Cn}{m+4}=\frac{\frac{n(p-2)}{(m+1)(m+2)}+\frac{n(p-1)}{(m+1)(m+3)}}{m+4}$

daher $E=\frac{n\{(p-1)(m+2)+(p-2)(m+3)\}}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)}$

6) $F(m+4)-D(n-2)=0$ oder $F=\frac{D(n-2)}{m+4}$, daher $F=\frac{n(n-1)(n-2)}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)}$

7) $G(m+5)-C(p-3)=0$ oder $G=\frac{C(p-3)}{m+5}$, daher $G=\frac{(p-1)(p-3)}{(m+1)(m+3)(m+5)}$

8) $-D(p-3)-E(n-1)+H(m+5)=0$ oder $H=\frac{D(p-3)+E(n-1)}{m+5}$, oder

$$H=\frac{\frac{n(n-1)(p-3)}{(m+1)(m+2)(m+3)}+\frac{n(n-1)\{(p-1)(m+2)+(p-2)(m+3)\}}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)}}{m+5},\ \text{daher}\ H=\frac{n(n-1)\{(p-1)(m+2)+(p-2)(m+3)+(p-3)(m+4)\}}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)}$$

9) $I(m+5)-F(n-3)=0$ oder $I=\frac{F(n-3)}{m+5}$, daher $I=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)}$

10. $-E(p-4)-Gn+K(m+6)=o$ oder $K=\frac{E(p-4)+Gn}{m+6}=\frac{\frac{n(p-4)\{(p-1)(m+2)+(p-2)(m+3)\}}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)}+\frac{n(p-1)(p-3)}{(m+1)(m+3)(m+5)}}{m+6}$

oder $K=\frac{n\left\{\frac{(p-4)(m+5)\{(p-1)(m+2)+(p-2)(m+3)\}+(p-1)(p-3)(m+2)(m+4)}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)}\right\}}{m+6}$, daher

$$K=\frac{n\{(p-1)(p-3)(m+2)(m+4)+(p-1)(p-4)(m+2)(m+5)+(p-2)(p-4)(m+3)(m+5)\}}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)}$$

11) $-F(p-4)-H(n-2)+L(m+6)=o$ oder $L=\frac{F(p-4)+H(n-2)}{m+6}$ oder

$L=\frac{\frac{n(n-1)(n-2)(p-4)}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)}+\frac{n(n-1)(n-2)\{(p-1)(m+2)+(p-2)(m+3)+(p-3)(m+4)\}}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)}}{m+6}$, daher

$$L=\frac{n(n-1)(n-2)\{(p-1)(m+2)+(p-2)(m+3)+(p-3)(m+4)+(p-4)(m+5)\}}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)}$$

12) $M(m+6)-I(n-4)=o$ oder $M=\frac{I(n-4)}{m+6}$, daher

$$M=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)}$$

13) $N(m+7)-G(p-5)=o$ oder $N=\frac{G(p-5)}{m+7}$, daher

$$N=\frac{(p-1)(p-3)(p-5)}{(m+1)(m+3)(m+5)(m+7)}$$

14) $-H(p-5)-K(n-1)+O(m+7)=o$ oder $O=\frac{H(p-5)+K(n-1)}{m+7}$ oder

$$O=\frac{\frac{n(n-1)(p-3)\{(p-1)(m+2)+(p-2)(m+3)+(p-3)(m+4)\}}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)}+\frac{n(n-1)\{(p-1)(p-3)(m+2)(m+4)+(p-1)(p-4)(m+2)(m+5)+(p-2)(p-4)(m+3)(m+5)\}}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)}}{m+7}$$

daher

$$O=n(n-1)\left\{\frac{\begin{matrix}(p-1)(p-3)(m+2)(m+4)+(p-1)(p-4)(m+2)(m+5)+(p-1)(p-3)(m+2)(m+6)\\+(p-2)(p-4)(m+3)(m+5)+(p-2)(p-5)(m+3)(m+6)\\+(p-3)(p-5)(m+4)(m+6)\end{matrix}}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)(m+7)}\right\}$$

15. $-I(p-5)-L(n-3)+P(m+7)=o$ oder $P=\frac{I(p-5)+L(n-3)}{m+7}$ oder

$P=\frac{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(p-5)}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\{(p-1)(m+2)+(p-2)(m+3)+(p-3)(m+4)+(p-4)(m+5)\}}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+3)(m+6)}}{m+7}$, daher

$$P=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\{(p-1)(m+2)+(p-2)(m+3)+(p-3)(m+4)+(p-4)(m+5)+(p-5)(m+6)\}}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)(m+7)}$$

16) $Q(m+7)-M(n-5)=o$ oder $Q=\frac{M(n-5)}{m+7}$ daher $Q=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)(m+7)}$.

17) $-K(p-6)-Nn+R(m+8)=o$ oder $R=\frac{K(p-6)+Nn}{m+8}$ oder

$$R=\left\{\frac{n(p-6)\{(p-1)(m+2)(p-3)(m+4)+(p-1)(p-4)(m+2)(m+5)+(p-2)(p-4)(m+3)(m+5)\}}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)}+\frac{(p-1)(p-3)(p-5).n}{(m+1)(m+3)(m+5)(m+7)}\right\}:(m+8)$$

$$=n\left\{\frac{(p-6)(m+7)\{(p-1)(p-3)(m+2)(m+4)+(p-1)(p-4)(m+2)(m+5)+(p-2)(p-4)(m+3)(m+5)\}+(p-1)(p-3)(p-5)(m+2)(m+4)(m+6)}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)(m+7)(m+8)}\right\}$$

daher

$$R=n\left\{\frac{\begin{matrix}(p-1)(p-3)(p-5)(m+2)(m+4)(m+6)+(p-1)(p-3)(p-6)(m+2)(m+4)(m+7)+(p-1)(p-4)(p-6)(m+2)(m+5)(m+7)\\+(p-2)(p-4)(p-6)(m+3)(m+5)(m+7)\end{matrix}}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)(m+7)(m+8)}\right\}$$

18) $-L(p-6)-O(n-2)+S(m+8)=o$ oder $S=\frac{L(p-6)+O(n-2)}{m+8}$ oder

$$S=\left\{\begin{matrix}\frac{n(n-1)(n-2)(p-6)\{(p-1)(m+2)+(p-2)(m+3)+(p-3)(m+4)+(p-4)(m+5)\}}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)}\\+n(n-1)(n-2)\left\{\frac{\begin{matrix}(p-1)(p-3)(m+2)(m+4)+(p-1)(p-4)(m+2)(m+5)+(p-1)(p-5)(m+2)(m+6)\\+(p-2)(p-4)(m+3)(m+5)+(p-2)(p-5)(m+3)(m+6)\\+(p-3)(p-5)(m+4)(m+6)\end{matrix}}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)(m+7)}\right\}\end{matrix}\right\}:(m+8),$$

daher

$$S = n(n-1)(n-2)\left\{\frac{\begin{array}{l}(p-1)(p-3)(m+2)(m+4) + (p-1)(p-4)(m+2)(m+5) + (p-1)(p-5)(m+2)(m+6) + (p-1)(p-6)(m+2)(m+7)\\ + (p-2)(p-4)(m+3)(m+5) + (p-2)(p-5)(m+3)(m+6) + (p-2)(p-6)(m+3)(m+7)\\ + (p-3)(p-5)(m+4)(m+6) + (p-3)(p-6)(m+4)(m+7)\\ + (p-4)(p-6)(m+5)(m+7)\end{array}}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)(m+7)(m+8)}\right\}$$

19) $-M(p-6) - P(n-4) + T(m+8) = o$ oder $T = \frac{M(p-6) + P(n-4)}{m+8}$. Es entsteht also

$$T = \frac{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(p-6)}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\{(p-1)(m+2) + (p-2)(m+3) + (p-3)(m+4) + (p-4)(m+5) + (p-5)(m+6)\}}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)(m+7)}}{m+8}$$

daher

$$T = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\{(p-1)(m+2) + (p-2)(m+3) + (p-3)(m+4) + (p-4)(m+5) + (p-5)(m+6) + (p-6)(m+7)\}}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)(m+7)(m+8)}$$

20) $-Q(n-6) + U(m+8) = o$ oder $U = \frac{Q(n-6)}{m+8}$, daher $U = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)(m+7)(m+8)}$

21) $-N(p-7) + A_{,}(m+9) = o$ oder $A_{,} = \frac{N(p-7)}{m+9}$, daher $A_{,} = \frac{(p-1)(p-3)(p-5)(p-7)}{(m+1)(m+3)(m+5)(m+7)(m+9)}$

22) $O(p-7) - R(n-1) + B_{,}(m+9) = o$ oder $B_{,} = \frac{O(p-7) + R(n-1)}{m+9}$ oder

$$B_{,} = \left\{\begin{array}{l}\frac{n(n-1)(p-7)\left\{\begin{array}{l}(p-1)(p-3)(m+2)(m+4) + (p-1)(p-4)(m+2)(m+5) + (p-1)(p-5)(m+2)(m+6)\\ + (p-2)(p-4)(m+3)(m+5) + (p-2)(p-5)(m+3)(m+6)\\ + (p-3)(p-5)(m+4)(m+6)\end{array}\right\}}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)(m+7)}\\ + \frac{n(n-1)\left\{\begin{array}{l}(p-1)(p-3)(p-5)(m+2)(m+4)(m+6) + (p-1)(p-3)(p-6)(m+2)(m+4)(m+7)\\ + (p-1)(p-4)(p-6)(m+2)(m+5)(m+7) + (p-2)(p-4)(p-6)(m+3)(m+5)(m+7)\end{array}\right\}}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)(m+7)(m+8)}\end{array}\right\} : (m+9)$$

daher

$$B_{,} = n(n-1)\left\{\frac{\begin{array}{l}(p-1)(p-3)(p-5)(m+2)(m+4)(m+6) + (p-1)(p-3)(p-6)(m+2)(m+4)(m+7) + (p-1)(p-3)(p-7)(m+2)(m+4)(m+8)\\ + (p-1)(p-4)(p-6)(m+2)(m+5)(m+7) + (p-1)(p-4)(p-7)(m+2)(m+5)(m+8) + (p-1)(p-5)(p-7)(m+2)(m+6)(m+8)\\ + (p-2)(p-4)(p-6)(m+3)(m+5)(m+7) + (p-2)(p-4)(p-7)(m+3)(m+5)(m+8) + (p-2)(p-5)(p-7)(m+3)(m+6)(m+8)\\ + (p-3)(p-5)(p-7)(m+4)(m+6)(m+8)\end{array}}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)(m+7)(m+8)(m+9)}\right\}$$

23) $-P(p-7) - S(n-3) + C_{,}(m+9) = o$ oder $C_{,} = \frac{P(p-7) + S(n-3)}{m+9}$ oder

$$C_{,} = \left\{\begin{array}{l}\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(p-7)\{(p-1)(m+2) + (p-2)(m+3) + (p-3)(m+4) + (p-4)(m+5) + (p-5)(m+6)\}}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)(m+7)}\\ + n(n-1)(n-2)(n-3)\left\{\frac{\begin{array}{l}(p-1)(p-3)(m+2)(m+4) + (p-1)(p-4)(m+2)(m+5) + (p-1)(p-5)(m+2)(m+6) + (p-1)(p-6)(m+2)(m+7)\\ + (p-2)(p-4)(m+3)(m+5) + (p-2)(p-5)(m+3)(m+6) + (p-2)(p-6)(m+3)(m+7)\\ + (p-3)(p-5)(m+4)(m+6) + (p-3)(p-6)(m+4)(m+7)\\ + (p-4)(p-6)(m+5)(m+7)\end{array}}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)(m+7)(m+8)}\right\}\end{array}\right\} : (m+9)$$

daher

$$C_{,} = n(n-1)(n-2)(n-3)\left\{\frac{\begin{array}{l}(p-1)(p-3)(m+2)(m+4) + (p-1)(p-4)(m+2)(m+5) + (p-1)(p-5)(m+2)(m+6) + (p-1)(p-6)(m+2)(m+7) + (p-1)(p-7)(m+2)(m+8)\\ + (p-2)(p-4)(m+3)(m+5) + (p-2)(p-5)(m+3)(m+6) + (p-2)(p-6)(m+3)(m+7) + (p-2)(p-7)(m+3)(m+8)\\ + (p-3)(p-5)(m+4)(m+6) + (p-3)(p-6)(m+4)(m+7) + (p-3)(p-7)(m+4)(m+8)\\ + (p-4)(p-6)(m+5)(m+7) + (p-4)(p-7)(m+5)(m+8)\\ + (p-5)(p-7)(m+6)(m+8)\end{array}}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)(m+7)(m+8)(m+9)}\right\}.$$

24) $-Q(p-7) - T(n-5) + D_{,}(m+9) = o$ oder $D_{,} = \frac{Q(p-7) + T(n-5)}{m+9}$ oder

$$D_{,} = \left\{\begin{array}{l}\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(p-7)}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)(m+7)}\\ + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)\{(p-1)(m+2) + (p-2)(m+3) + (p-3)(m+4) + (p-4)(m+5) + (p-5)(m+6) + (p-6)(m+7)\}}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)(m+7)(m+8)}\end{array}\right\} : (m+9)$$

daher

$$D_1 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)\{(p-1)(m+2)+(p-2)(m+5)+(p-3)(m+4)+(p-4)(m+5)+(p-5)(m+6)+(p-6)(m+7)+(p-7)(m+8)\}}{(m+1)(m+2)(m+5)(m+4)(m+5)(m+6)(m+7)(m+8)(m+9)}$$

25) $-U(n-7)+E_1(m+9)=o$ oder $E_1=\frac{U(n-7)}{m+9}$ daher $E_1=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)(m+7)(m+8)(m+9)}$

26) $-R(p-8)-A_1n+F_1(m+10)=o$ oder $F_1=\frac{R(p-8)+A_1n}{m+10}$ oder

$$F_1=\frac{n(p-8)\left\{\frac{(p-1)(p-5)(p-5)(m+2)(m+4)(m+6)+(p-1)(p-3)(p-6)(m+2)(m+4)(m+7)+(p-1)(p-4)(p-6)(m+2)(m+5)(m+7)+(p-2)(p-4)(p-6)(m+5)(m+5)(m+7)}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)(m+7)(m+8)}\right\}+\frac{n(p-1)(p-3)(p-5)(p-7)}{(m+1)(m+3)(m+5)(m+7)(m+9)}}{m+10}$$

daher

$$F_1=n\left\{\frac{\begin{array}{l}(p-1)(p-5)(p-5)(p-7)(m+2)(m+4)(m+6)(m+8)+(p-1)(p-3)(p-5)(p-8)(m+2)(m+4)(m+6)(m+9)\\+(p-1)(p-3)(p-6)(p-8)(m+2)(m+4)(m+7)(m+9)+(p-1)(p-4)(p-6)(p-8)(m+2)(m+3)(m+7)(m+9)\\+(p-2)(p-4)(p-6)(p-8)(m+3)(m+5)(m+7)(m+9)\end{array}}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+3)(m+6)(m+7)(m+8)(m+9)(m+10)}\right\}$$

27) $-S(p-8)-B_1(n-2)+G_1(m+10)=o$ oder $G_1=\frac{S(p-8)+B_1(n-2)}{m+10}$ oder

$$G_1=\left\{\begin{array}{l}n(n-1)(n-2)(p-8)\left\{\frac{\begin{array}{l}(p-1)(p-3)(m+2)(m+4)+(p-1)(p-4)(m+2)(m+5)+(p-1)(p-5)(m+2)(m+6)+(p-1)(p-6)(m+2)(m+7)\\+(p-2)(p-4)(m+3)(m+5)+(p-2)(p-5)(m+3)(m+6)+(p-2)(p-6)(m+3)(m+7)\\+(p-5)(p-5)(m+4)(m+6)+(p-3)(p-6)(m+4)(m+7)\\+(p-4)(p-6)(m+5)(m+7)\end{array}}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+3)(m+6)(m+7)(m+8)}\right\}\\+n(n-1)(n-2)\left\{\frac{\begin{array}{l}(p-1)(p-5)(p-5)(m+2)(m+4)(m+6)+(p-1)(p-3)(p-6)(m+2)(m+4)(m+7)+(p-1)(p-5)(p-7)(m+2)(m+4)(m+8)\\+(p-1)(p-4)(p-6)(m+2)(m+5)(m+7)+(p-1)(p-4)(p-7)(m+2)(m+5)(m+8)+(p-1)(p-5)(p-7)(m+2)(m+6)(m+8)\\+(p-2)(p-4)(p-6)(m+3)(m+5)(m+7)+(p-2)(p-4)(p-7)(m+3)(m+5)(m+8)+(p-2)(p-5)(p-7)(m+3)(m+6)(m+8)\\+(p-3)(p-5)(p-7)(m+4)(m+6)(m+8)\end{array}}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)(m+7)(m+8)(m+9)}\right\}\end{array}\right\}:(m+10)$$

daher

$$G_1=n(n-1)(n-2)\left\{\frac{\begin{array}{l}(p-1)(p-3)(p-5)(m+2)(m+4)(m+6)+(p-1)(p-3)(p-6)(m+2)(m+4)(m+7)+(p-1)(p-3)(p-7)(m+2)(m+4)(m+8)+(p-1)(p-3)(p-8)(m+2)(m+4)(m+9)\\+(p-1)(p-4)(p-6)(m+2)(m+5)(m+7)+(p-1)(p-4)(p-7)(m+2)(m+5)(m+8)+(p-1)(p-4)(p-8)(m+2)(m+5)(m+9)+(p-1)(p-5)(p-7)(m+2)(m+6)(m+8)\\+(p-1)(p-5)(p-8)(m+2)(m+6)(m+9)+(p-1)(p-6)(p-8)(m+2)(m+7)(m+9)+(p-2)(p-4)(p-6)(m+3)(m+5)(m+7)+(p-2)(p-4)(p-7)(m+3)(m+5)(m+8)\\+(p-2)(p-4)(p-8)(m+3)(m+5)(m+9)+(p-2)(p-5)(p-7)(m+3)(m+6)(m+8)+(p-2)(p-5)(p-8)(m+5)(m+6)(m+9)+(p-2)(p-6)(p-8)(m+3)(m+7)(m+9)\\+(p-5)(p-5)(p-7)(m+4)(m+6)(m+8)+(p-3)(p-5)(p-8)(m+4)(m+6)(m+9)+(p-3)(p-6)(p-8)(m+4)(m+7)(m+9)+(p-4)(p-6)(p-8)(m+5)(m+7)(m+9)\end{array}}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)(m+7)(m+8)(m+9)(m+10)}\right\}$$

28) $-T(p-8)-C_1(n-4)+H_1(m+50)=o$ oder $H_1=\frac{T(p-8)+C_1(n-4)}{m+10}$ oder

$$H_1=\left\{\begin{array}{l}\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(p-8)\{(p-1)(m+2)+(p-2)(m+5)+(p-3)(m+4)+(p-4)(m+5)+(p-3)(m+6)+(p-6)(m+7)\}}{(m+1)(m+2)(m+5)(m+4)(m+5)(m+6)(m+7)(m+8)}\\+n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\left\{\frac{\begin{array}{l}(p-1)(p-3)(m+2)(m+4)+(p-1)(p-4)(m+2)(m+5)+(p-1)(p-5)(m+2)(m+6)+(p-1)(p-6)(m+2)(m+7)+(p-1)(p-7)(m+2)(m+8)\\+(p-2)(p-4)(m+5)(m+5)+(p-2)(p-5)(m+3)(m+6)+(p-2)(p-6)(m+5)(m+7)+(p-2)(p-7)(m+5)(m+8)\\+(p-3)(p-5)(m+4)(m+6)+(p-3)(p-6)(m+4)(m+7)+(p-3)(p-7)(m+4)(m+8)\\+(p-4)(p-6)(m+5)(m+7)+(p-4)(p-7)(m+5)(m+8)\\+(p-5)(p-7)(m+6)(m+8)\end{array}}{(m+1)(m+2)(m+5)(m+4)(m+5)(m+6)(m+7)(m+8)(m+9)}\right\}\end{array}\right\}:(m+10)$$

daher

$$H_1=n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\left\{\frac{\begin{array}{l}(p-1)(p-5)(m+2)(m+4)+(p-1)(p-4)(m+2)(m+5)+(p-1)(p-5)(m+2)(m+6)+(p-1)(p-6)(m+2)(m+7)+(p-1)(p-7)(m+2)(m+8)+(p-1)(p-8)(m+2)(m+9)\\+(p-2)(p-4)(m+5)(m+5)+(p-2)(p-5)(m+5)(m+6)+(p-2)(p-6)(m+5)(m+7)+(p-2)(p-7)(m+5)(m+8)+(p-2)(p-8)(m+5)(m+9)\\+(p-3)(p-5)(m+4)(m+6)+(p-3)(p-6)(m+4)(m+7)+(p-3)(p-7)(m+4)(m+8)+(p-5)(p-8)(m+4)(m+9)\\+(p-4)(p-6)(m+5)(m+7)+(p-4)(p-7)(m+5)(m+8)+(p-4)(p-8)(m+5)(m+9)\\+(p-5)(p-7)(m+6)(m+8)+(p-5)(p-8)(m+6)(m+9)\\+(p-6)(p-8)(m+7)(m+9)\end{array}}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)(m+7)(m+8)(m+9)(m+10)}\right\}$$

29) $-U_{,}(p-8)-D_{,}(n-6)+I_{,}(m+10)=o$ oder $I_{,}=\frac{U_{,}(p-8)+D_{,}(n-6)}{m+10}$, oder

$$I_{,}=\left\{\begin{array}{l}\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(p-8)}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)(m+7)(m+8)}\\ +\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)\left\{\begin{array}{l}(p-1)(m+2)+(p-2)(m+3)+(p-3)(m+4)+(p-4)(m+5)\\+(p-5)(m+6)+(p-6)(m+7)+(p-7)(m+8)\end{array}\right\}}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)(m+7)(m+8)(m+9)}\end{array}\right\}:(m+10)$$

daher

$$I_{,}=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)\{(p-1)(m+2)+(p-2)(m+3)+(p-3)(m+4)+(p-4)(m+5)+(p-5)(m+6)+(p-6)(m+7)+(p-7)(m+8)+(p-8)(m+9)\}}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)(m+7)(m+8)(m+9)(m+10)}$$

30) $-E_{,}(n-8)+K_{,}(m+10)=o$ oder $K_{,}=\frac{E_{,}(n-8)}{m+10}$ daher

$$K_{,}=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)(m+7)(m+8)(m+9)(m+10)}$$

Ich werde nun das Integral auf der nächsten Seite aufstellen, da sich alsdann die Coëfficienten leichter übersehen lassen; die Coëfficienten der Reductionsintegrale von der Form $\int \overset{n}{x} \cdot \overset{m}{\cos x} \cdot dx$ sind vorläufig noch nicht bestimmt (verte!). —

Die Anzahl der Glieder in den mit trigonometrischen Factoren multiplicirten Summen ist mir bekannt. Die Summen des 3ten und 4ten Gliedes enthalten je 2 Summanden, diejenigen des 5ten und 6ten Gliedes je 3 Summanden, die des 7ten und 8ten Gliedes je 4, die des 9ten und 10ten je 5 Summanden u. s. w.

Die Coëfficienten der letzten dieser Summanden sind $D=\frac{n(n-1)}{(m+1)(m+2)(m+3)}$, $F=\frac{n(n-1)(n-2)}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)}$, $I=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)}$ u. s. w.; die Coëfficienten der ersten Summanden sind entweder (wie bei der 1ten, 3ten, 5ten Summe) $C=\frac{p-1}{(m+1)(m+3)}$, $G=\frac{(p-1)(p-3)}{(m+1)(m+3)(m+5)}$, $N=\frac{(p-1)(p-3)(p-5)}{(m+1)(m+3)(m+5)(m+7)}$ u. s. w: oder (wie bei den anderen Summen) mit n multiplicirte Grössen.

Ebenso klar ist das Fortschreiten der Factoren n, $n(n-1)(n-2)$, $n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$ u. s. w. einerseits, wie der Factoren $n(n-1)$, $n(n-1)(n-2)(n-3)$, $n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$ u. s. w. andrerseits, sowie auch der Nenner, welche bei dem $p$ten Gliede, wenn p gerade, sich von $(m+1)(m+2)(m+3)$ .... bis zu $(m+p)$ erstrecken, und welches auch, mit Ausnahme der verkürzten Nenner des ersten Summanden, bei den ungeraden Gliedern der Fall ist. Es handelt sich also nur um die Entstehung der aus Producten bestehenden Summen der Coëfficienten, und wäre es wünschenswerth, dieselben aus den bisjetzt bekannten Coëfficienten unmittelbar herleiten zu können.

In jedem Gliede, vom 4ten an, ist eine solche Summe von Producten aus je 2 Factoren jedesmal bei dem vorletzten Summanden anzutreffen. Beim 4ten Gliede ist es $(p-1)(m+2)+(p-2)(m+3)$, beim 5ten Gliede $(p-1)(m+2)+(p-2)(m+3)+(p-3)(m+4)$, beim 6ten Gliede $(p-1)(m+2)+(p-2)(m+3)+(p-3)(m+4)+(p-4)(m+5)$. Das Gesetz, nach welchem diese Summen fortschreiten, ist leicht zu erkennen, und durch eine gewisse Multiplication ihrer Glieder untereinander erhält man zugleich die Summen der anderen Coëfficienten, so zwar, dass man eigentlich die Reihenfolge der Summanden innerhalb der einzelnen Glieder des $\int \overset{n}{x} \cdot \overset{m}{\cos x} \cdot \overset{p}{\sin x}\, dx$ umkehren müsste.

I. Im 6ten Gliede kommt also beim vorletzten Summanden im Coëfficienten $I_{,}$ die Summe $(p-1)(m+2)+(p-2)(m+3)+(p-3)(m+4)+(p-4)(m+5)$ vor. Dieselbe sei $=a+b+c+d$ und werde ich nun folgende Verbindungen dieser 4 Grössen unter einander vornehmen.

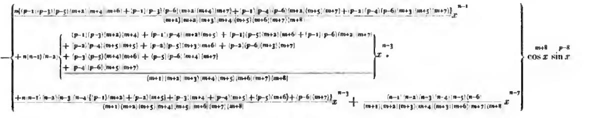
$S=\left\{\begin{array}{l}ac+ad\\+bd\end{array}\right.$ wobei ich also mit dem ersten Gliede die übrigen multiplicirt, indess das nächstfolgende Glied b hierbei übersprungen habe. Ebenso ist es mit dem zweiten Gliede b geschehen,

$$\int x^n . \cos^m x . \sin^p x . dx = -\frac{x^n . \cos^{m+1} x \sin^{p-1} x}{m+1} - \frac{n x^{n-1} . \cos^{m+2} x \sin^{p-2} x}{(m+1)(m+2)} - \left\{\frac{(p-1)x^n}{(m+1)(m+3)} + \frac{n(n-1)x^{n-2}}{(m+1)(m+2)(m+3)}\right\}\cos^{m+3} x \sin^{p-3} x - \left\{\frac{n\{(p-1)(m+2)+(p-2)(m+3)\}}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)}x^{n-1} + \frac{n(n-1)(n-2)}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)}x^{n-3}\right\}\cos^{m+4} x \sin^{p-4} x$$

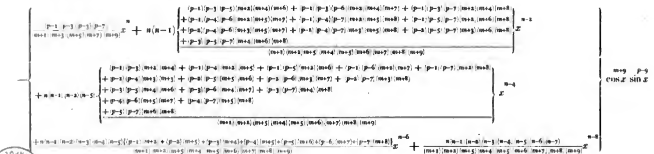
$$-\left\{\frac{(p-1)(p-3)}{(m+1)(m+3)(m+5)}x^n + \frac{n(n-1)\{(p-1)(m+2)+(p-2)(m+3)+(p-3)(m+4)\}}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)}x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)}x^{n-4}\right\}\cos^{m+5} x . \sin^{p-5} x$$

$$-\left\{\frac{n\{(p-1)(p-3)(m+2)(m+4)+(p-1)(p-4)(m+2)(m+5)+(p-2)(p-4)(m+3)(m+5)\}}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)}x^{n-1} + \frac{n(n-1)(n-2)\{(p-1)(m+2)+(p-2)(m+3)+(p-3)(m+4)+(p-4)(m+5)\}}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)}x^{n-3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)}x^{n-5}\right\}\cos^{m+6} x \sin^{p-6} x$$

$$-\left\{\begin{array}{l}\frac{(p-1)(p-3)(p-5)}{(m+1)(m+3)(m+5)(m+7)}x^n + \frac{n(n-1)\{(p-1)(p-3)(m+2)(m+4)+(p-1)(p-4)(m+2)(m+5)+(p-1)(p-5)(m+2)(m+6)+(p-2)(p-4)(m+3)(m+5)+(p-2)(p-5)(m+3)(m+6)+(p-3)(p-5)(m+4)(m+6)\}}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)(m+7)}x^{n-2}\\ + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\{(p-1)(m+2)+(p-2)(m+3)+(p-3)(m+4)+(p-4)(m+5)+(p-5)(m+6)\}}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)(m+7)}x^{n-4} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)(m+7)}x^{n-6}\end{array}\right\}\cos^{m+7} x \sin^{p-7} x$$



$$-\left\{\begin{array}{l}\frac{n\{(p-1)(p-3)(p-5)(m+2)(m+4)(m+6)+(p-1)(p-3)(p-6)(m+2)(m+4)(m+7)+(p-1)(p-4)(p-6)(m+2)(m+5)(m+7)+(p-2)(p-4)(p-6)(m+3)(m+5)(m+7)\}}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)(m+7)(m+8)}x^{n-1}\\ + n(n-1)(n-2)\frac{\left\{\begin{array}{l}(p-1)(p-3)(m+2)(m+4)+(p-1)(p-4)(m+2)(m+5)+(p-1)(p-5)(m+2)(m+6)+(p-1)(p-6)(m+2)(m+7)\\+(p-2)(p-4)(m+3)(m+5)+(p-2)(p-5)(m+3)(m+6)+(p-2)(p-6)(m+3)(m+7)\\+(p-3)(p-5)(m+4)(m+6)+(p-3)(p-6)(m+4)(m+7)\\+(p-4)(p-6)(m+5)(m+7)\end{array}\right\}}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)(m+7)(m+8)}x^{n-3}\\ + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\{(p-1)(m+2)+(p-2)(m+3)+(p-3)(m+4)+(p-4)(m+5)+(p-5)(m+6)+(p-6)(m+7)\}}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)(m+7)(m+8)}x^{n-5} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)(m+7)(m+8)}x^{n-7}\end{array}\right\}\cos^{m+8} x \sin^{p-8} x$$



$$-\left\{\begin{array}{l}\frac{(p-1)(p-3)(p-5)(p-7)}{(m+1)(m+3)(m+5)(m+7)(m+9)}x^n + n(n-1)\frac{\left\{\begin{array}{l}(p-1)(p-3)(p-5)(m+2)(m+4)(m+6)+(p-1)(p-3)(p-6)(m+2)(m+4)(m+7)+(p-1)(p-3)(p-7)(m+2)(m+4)(m+8)\\+(p-1)(p-4)(p-6)(m+2)(m+5)(m+7)+(p-1)(p-4)(p-7)(m+2)(m+5)(m+8)+(p-1)(p-5)(p-7)(m+2)(m+6)(m+8)\\+(p-2)(p-4)(p-6)(m+3)(m+5)(m+7)+(p-2)(p-4)(p-7)(m+3)(m+5)(m+8)+(p-2)(p-5)(p-7)(m+3)(m+6)(m+8)\\+(p-3)(p-5)(p-7)(m+4)(m+6)(m+8)\end{array}\right\}}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)(m+7)(m+8)(m+9)}x^{n-2}\\ + n(n-1)(n-2)(n-3)\frac{\left\{\begin{array}{l}(p-1)(p-3)(m+2)(m+4)+(p-1)(p-4)(m+2)(m+5)+(p-1)(p-5)(m+2)(m+6)+(p-1)(p-6)(m+2)(m+7)+(p-1)(p-7)(m+2)(m+8)\\+(p-2)(p-4)(m+3)(m+5)+(p-2)(p-5)(m+3)(m+6)+(p-2)(p-6)(m+3)(m+7)+(p-2)(p-7)(m+3)(m+8)\\+(p-3)(p-5)(m+4)(m+6)+(p-3)(p-6)(m+4)(m+7)+(p-3)(p-7)(m+4)(m+8)\\+(p-4)(p-6)(m+5)(m+7)+(p-4)(p-7)(m+5)(m+8)\\+(p-5)(p-7)(m+6)(m+8)\end{array}\right\}}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)(m+7)(m+8)(m+9)}x^{n-4}\\ + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)\{(p-1)(m+2)+(p-2)(m+3)+(p-3)(m+4)+(p-4)(m+5)+(p-5)(m+6)+(p-6)(m+7)+(p-7)(m+8)\}}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)(m+7)(m+8)(m+9)}x^{n-6} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)(m+7)(m+8)(m+9)}x^{n-8}\end{array}\right\}\cos^{m+9} x \sin^{p-9} x$$

$$-\left\{\begin{aligned}
&n\left\{\frac{\begin{aligned}&(p-1)(p-3)(p-5)(p-7)(m+2)(m+4)(m+6)(m+8)+(p-1)(p-3)(p-5)(p-8)(m+2)(m+4)(m+6)(m+9)+(p-1)(p-3)(p-6)(p-8)(m+2)(m+4)(m+7)(m+9)\\&+(p-1)(p-4)(p-6)(p-8)(m+2)(m+5)(m+7)(m+9)+(p-2)(p-4)(p-6)(p-8)(m+3)(m+5)(m+7)(m+9)\end{aligned}}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)(m+7)(m+8)(m+9)(m+10)}\right\}x^{n-1}\\
&+n(n-1)(n-2)\left\{\frac{\begin{aligned}&(p-1)(p-3)(p-5)(m+2)(m+4)(m+6)+(p-1)(p-3)(p-6)(m+2)(m+4)(m+7)+(p-1)(p-3)(p-7)(m+2)(m+4)(m+8)+(p-1)(p-3)(p-8)(m+2)(m+4)(m+9)\\&+(p-1)(p-4)(p-6)(m+2)(m+5)(m+7)+(p-1)(p-4)(p-7)(m+2)(m+5)(m+8)+(p-1)(p-4)(p-8)(m+2)(m+5)(m+9)+(p-1)(p-5)(p-7)(m+2)(m+6)(m+8)\\&+(p-1)(p-5)(p-8)(m+2)(m+6)(m+9)+(p-1)(p-6)(p-8)(m+2)(m+7)(m+9)+(p-2)(p-4)(p-6)(m+3)(m+5)(m+7)+(p-2)(p-4)(p-7)(m+3)(m+5)(m+8)\\&+(p-2)(p-4)(p-8)(m+3)(m+5)(m+9)+(p-2)(p-5)(p-7)(m+3)(m+6)(m+8)+(p-2)(p-5)(p-8)(m+3)(m+6)(m+9)+(p-2)(p-6)(p-8)(m+3)(m+7)(m+9)\\&+(p-3)(p-5)(p-7)(m+4)(m+6)(m+8)+(p-3)(p-5)(p-8)(m+4)(m+6)(m+9)+(p-3)(p-6)(p-8)(m+4)(m+7)(m+9)+(p-4)(p-6)(p-8)(m+5)(m+7)(m+9)\end{aligned}}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)(m+7)(m+8)(m+9)(m+10)}\right\}x^{n-3}\\
&+n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\left\{\frac{\begin{aligned}&(p-1)(p-3)(m+2)(m+4)+(p-1)(p-4)(m+2)(m+5)+(p-1)(p-5)(m+2)(m+6)+(p-1)(p-6)(m+2)(m+7)+(p-1)(p-7)(m+2)(m+8)+(p-1)(p-8)(m+2)(m+9)\\&+(p-2)(p-4)(m+3)(m+5)+(p-2)(p-5)(m+3)(m+6)+(p-2)(p-6)(m+3)(m+7)+(p-2)(p-7)(m+3)(m+8)+(p-2)(p-8)(m+3)(m+9)\\&+(p-3)(p-5)(m+4)(m+6)+(p-3)(p-6)(m+4)(m+7)+(p-3)(p-7)(m+4)(m+8)+(p-3)(p-8)(m+4)(m+9)\\&+(p-4)(p-6)(m+5)(m+7)+(p-4)(p-7)(m+5)(m+8)+(p-4)(p-8)(m+5)(m+9)\\&+(p-5)(p-7)(m+6)(m+8)+(p-5)(p-8)(m+6)(m+9)\\&+(p-6)(p-8)(m+7)(m+9)\end{aligned}}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)(m+7)(m+8)(m+9)(m+10)}\right\}x^{n-5}\\
&+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)\{(p-1)(m+2)+(p-2)(m+3)+(p-3)(m+4)+(p-4)(m+5)+(p-5)(m+6)+(p-6)(m+7)+(p-7)(m+8)+(p-8)(m+9)\}}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)(m+7)(m+8)(m+9)(m+10)}x^{n-7}\\
&+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)(m+7)(m+8)(m+9)(m+10)}x^{n-9}
\end{aligned}\right\}\cos^{m+10}x\sin^{p-10}x$$

$$-\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\left\{\begin{aligned}&(\text{wenn } p \text{ ungerade})\quad a\int x^{n-1}.\cos^{m+p}x.dx+b\int x^{n-3}.\cos^{m+p}x.dx+c\int x^{n-5}.\cos^{m+p}x.dx+f\int x^{n-7}.\cos^{m+p}x.dx+\ldots\ldots+g\int x^{n-p}.\cos^{m+p}x.dx\\&(\text{wenn } p \text{ gerade})\quad a_{,}\int x^{n}.\cos^{m+p}x.dx+b_{,}\int x^{n-2}.\cos^{m+p}x.dx+c_{,}\int x^{n-4}.\cos^{m+p}x.dx+f_{,}\int x^{n-6}.\cos^{m+p}x.dx+\ldots\ldots+g_{,}\int x^{n-p}.\cos^{m+p}x.dx\end{aligned}\right\}+C.$$

und würde auch mit den folgenden Gliedern geschehen sein, wenn mehr als diese 4 Grössen a, b, c, d vorhanden gewesen wären.

S ist aber die Summe der Producte des vorhergehenden Coëfficienten K.

II. Im 7ten Gliede sei die Summe des Coëfficienten P

$$(p-1)(m+2) + (p-2)(m+3) + (p-3)(m+4) + (p-4)(m+5) + (p-5)(m+6) = a + b + c + d + e.$$

Ich bilde wie in I.

$$S = \left\{\begin{matrix} ac + ad + ae \\ + bd + be \\ + ce \end{matrix}\right\} = \begin{matrix} (p-1)(m+2)(p-3)(m+4) + (p-1)(m+2)(p-4)(m+5) + (p-1)(p-5)(m+2)(m+6) \\ + (p-2)(m+3)(p-4)(m+5) + (p-2)(m+3)(p-5)(m+6) \\ + (p-3)(m+4)(p-5)(m+6) \end{matrix}$$

S ist aber die Summe des vorhergehenden Coëfficienten O.

III. Im 8ten Gliede ist die Summe in T

$$(p-1)(m+2) + (p-2)(m+3) + (p-3)(m+4) + (p-4)(m+5) + (p-5)(m+6) + (p-6)(m+7) = a + b + c + d + e + f;$$

also

1)
$$S = \left\{\begin{matrix} ac + ad + ae + af \\ + bd + be + bf \\ + ce + cf \\ + df \end{matrix}\right\} = \begin{matrix} (p-1)(p-3)(m+2)(m+4) + (p-1)(p-4)(m+2)(m+5) + (p-1)(p-5)(m+2)(m+6) + (p-1)(p-6)(m+2)(m+7) \\ + (p-2)(p-4)(m+3)(m+5) + (p-2)(p-5)(m+3)(m+6) + (p-2)(p-6)(m+3)(m+7) \\ + (p-3)(p-5)(m+4)(m+6) + (p-3)(p-6)(m+4)(m+7) \\ + (p-4)(p-6)(m+5)(m+7) \end{matrix}$$

S ist aber die aus dem vorhergehenden Coëfficienten hergeleitete Summe.

2) Ich werde jetzt von der Summe $a + b + c + d + e + f$ drei Glieder auf gewisse Weise mit einander verbinden, und zwar folgendermaassen

$$S_{,} = \left\{\begin{matrix} ace + acf \\ + adf \end{matrix}\right\} + bdf,$$ wobei also immer das nächstfolgende Glied übersprungen worden ist.

Ich überspringe mit dem 1ten Gliede erst ein Glied (b), multiplicire c, überspringe wieder ein Glied (d) und multiplicire e; ich behalte sodann ac bei, überspringe damit nun zwei Glieder (d und e) und multiplicire f. Wären mehr Glieder vorhanden als a, b, c, d, e, f, so würde ich mit ac demnächst drei Glieder überspringen und erst das vierte damit multipliciren; dann vier Glieder überspringen und das fünfte multipliciren u. s. w.

Nun überspringe ich mit dem 1ten Gliede zwei Glieder (b und c), multiplicire d und verfahre im Uebrigen, wie eben beschrieben. Dann überspringe ich mit dem 1ten Gliede drei Glieder (b, c und d), multiplicire e und verfahre ebenfalls, wie vorher. Indess kann dieser letztere Fall nicht mehr eintreten, da die Summe $a + b + c + d + e + f$ bereits mit f abschliesst, daher f nicht mehr übersprungen werden kann.

Dasselbe Verfahren, wie mit dem ersten Gliede a, muss nun der Reihe nach auch mit allen übrigen Gliedern eingeschlagen werden. Es ist nun

$$S_{,} = \left\{\begin{matrix} (p-1)(p-3)(p-5)(m+2)(m+4)(m+6) + (p-1)(p-3)(p-6)(m+2)(m+4)(m+7) + (p-1)(p-4)(p-6)(m+2)(m+5)(m+7) \\ + (p-2)(p-4)(p-6)(m+3)(m+5)(m+7) \end{matrix}\right\}$$

gleich der Summe der Producte aus je 6 Factoren des Coëfficienten R.

IV. Im 9ten Gliede sei die Summe der Producte aus je 2 Factoren des Coëfficienten $D_{,}$

$$(p-1)(m+2) + (p-2)(m+3) + (p-3)(m+4) + (p-4)(m+5) + (p-5)(m+6) + (p-6)(m+7) + (p-7)(m+8)$$
$$= a + b + c + d + e + f + g;$$ alsdann erhalte ich folgende Verbindungen:

1) Die Verbindungen zu 2 Factoren sind

$$S = \left\{\begin{matrix} ac + ad + ae + af + ag \\ + bd + be + bf + bg \\ + ce + cf + cg \\ + df + dg \\ + eg \end{matrix}\right.$$

oder

$$S = \begin{cases} (p-1)(p-3)(m+2)(m+4) + (p-1)(p-4)(m+2)(m+5) + (p-1)(p-5)(m+2)(m+6) + (p-1)(p-6)(m+2)(m+7) + (p-1)(p-7)(m+2)(m+8) \\ + (p-2)(p-4)(m+3)(m+5) + (p-2)(p-5)(m+3)(m+6) + (p-2)(p-6)(m+3)(m+7) + (p-2)(p-7)(m+3)(m+8) \\ + (p-3)(p-5)(m+4)(m+6) + (p-3)(p-6)(m+4)(m+7) + (p-3)(p-7)(m+4)(m+8) \\ + (p-4)(p-6)(m+5)(m+7) + (p-4)(p-7)(m+5)(m+8) \\ + (p-5)(p-7)(m+6)(m+8) \end{cases}$$

welches die Summe der Producte aus je 4 Factoren des vorhergehenden Coëfficienten $C_,$ ist.

2) Die Verbindungen zu 3 Factoren sind

$$S_, = \begin{Bmatrix} ace + acf + acg \\ + adf + adg \\ + aeg \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} bdf + bdg \\ + beg \end{Bmatrix} + ceg$$

Dieses ist aber die Summe der Producte aus je 6 Factoren des Coëfficienten $B_,$.

V. Im 10ten Gliede sei die Summe der Producte aus je 2 Factoren des Coëfficienten $I_,$

$(p-1)(m+2) + (p-2)(m+3) + (p-3)(m+4) + (p-4)(m+5) + (p-5)(m+6) + (p-6)(m+7) + (p-7)(m+8) + (p-8)(m+9)$ $= a + b + c + d + e + f + g + h$; dann erhalte ich

1) Die Verbindungen zu 2 Factoren

$$S = \begin{Bmatrix} ac + ad + ae + af + ag + ah \\ + bd + be + bf + bg + bh \\ + ce + cf + cg + ch \\ + df + dg + dh \\ + eg + eh \\ + fh \end{Bmatrix}$$ welches die Summe der Producte aus je 4 Factoren des vorhergehenden Coëfficienten $H_,$ ist.

2) Die Verbindungen zu 3 Factoren sind

$$S_, = \begin{Bmatrix} ace + acf + acg + ach \\ + adf + adg + adh \\ + aeg + aeh \\ + afh \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} bdf + bdg + bdh \\ + beg + beh \\ + bfh \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} ceg + ceh \\ + cfh \end{Bmatrix} + dfh$$

Dieses ist aber die Summe der Producte aus je 6 Factoren des Coëfficienten $G_,$.

3) Ganz analog werde ich nun die Verbindungen zu 4 Factoren vornehmen, und erhalte alsdann

$$S_{,,} = \begin{Bmatrix} aceg + aceh \\ + acfh \\ + adfh \end{Bmatrix} + bdfh.$$ Es ist aber $S_{,,}$ die Summe der Producte aus je 8 Factoren des Coëfficienten $F_,$.

VI. Ich werde nun das nächstfolgende allgemeine Glied des $\int x^n \,.\, \cos^m x \,.\, \sin^p x \, dx$ bilden.

Die trigonometrischen Factoren sind $\cos^{m+11} x \,.\, \sin^{p-11} x$, und multipliciren eine Summe, welche die Potenzen $x^n, x^{n-2}, x^{n-4}, x^{n-6}, x^{n-8}$ und x^{n-10}, also 6 Glieder, enthält. Diese Glieder sind positiv, die Summe selbst negativ.

Das erste Glied der Summe ist $\frac{(p-1)(p-3)(p-5)(p-7)(p-9)}{(m+1)(m+3)(m+5)(m+7)(m+9)(m+11)} x^n$, das letzte $=$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)(m+7)(m+8)(m+9)(m+10)(m+11)} x^{n-10}$$

das vorletzte Glied ist $= \dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)\left\{\begin{array}{l}(p-1)(m+2)+(p-2)(m+3)+(p-3)(m+4)+(p-4)(m+5)+(p-5)(m+6)\\+(p-6)(m+7)+(p-7)(m+8)+(p-8)(m+9)+(p-9)(m+10)\end{array}\right\}}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)(m+7)(m+8)(m+9)(m+10)(m+11)}\,x^{n-8}$

Es sei nun die Summe

$$(p-1)(m+2)+(p-2)(m+3)+(p-3)(m+4)+(p-4)(m+5)+(p-5)(m+6)+(p-6)(m+7)+(p-7)(m+8)$$
$+ (p-8)(m+9)+(p-9)(m+10) = a+b+c+d+e+f+g+h+i$, dann erhalte ich

1) Die Verbindungen zu 2 Factoren

$$S = \left\{\begin{array}{l} ac+ad+ae+af+ag+ah+ai\\ +bd+be+bf+bg+bh+bi\\ +ce+cf+cg+ch+ci\\ +df+dg+dh+di\\ +eg+eh+ei\\ +fh+fi\\ +gi\end{array}\right\}$$

Das 4te Glied der mit $\cos^{m+11}x \sin^{p-11}x$ multiplicirten Summe ist also

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)\{S.\}x^{n-6}}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)(m+7)(m+8)(m+9)(m+10)(m+11)}$$

2) Die Verbindungen zu 3 Factoren sind

$$S_{,} = \left\{\begin{array}{l} ace+acf+acg+ach+aci\\ +adf+adg+adh+adi\\ +aeg+aeh+aei\\ +afh+afi\\ +agi\end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{l} bdf+bdg+bdh+bdi\\ +beg+beh+bei\\ +bfh+bfi\\ +bgi\end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{l} ceg+ceh+cei\\ +cfh+cfi\\ +cgi\end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{l} dfh+dfi\\ +dgi\end{array}\right\} + egi$$

das 3te Glied ist also $= \dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)\{S_{,}\}}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)(m+7)(m+8)(m+9)(m+10)(m+11)}\,x^{n-4}$

3) Die Verbindungen zu 4 Factoren sind

$$S_{,,} = \left\{\begin{array}{l} aceg+aceh+acei\\ +acfh+acfi\\ +acgi\\ +adfh+adfi\\ +adgi\\ +aegi\end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{l} bdfh+bdfi\\ +bdgi\\ +begi\end{array}\right\} + cegi$$

Es ist daher der 2te Summand =

$$\frac{n(n-1)\{S_{,,}\}}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)(m+7)(m+8)(m+9)(m+10)(m+11)}\,x^{n-2}$$

Um nun schliesslich noch die Coëfficienten der Reductionsintegrale von der Form $\int x^n . \cos^m x . dx$ zu bestimmen, erinnere ich mich der im Beginn des §. 11 gefundenen Resultate für

$\int x^n . \cos^m x \sin x\, dx, \int x^n . \cos^m x \sin^2 x\, dx, \int x^n . \cos^m x \sin^3 x\, dx, \int x^n . \cos^m x \sin^4 x\, dx, \int x^n . \cos^m x \sin^5 x\, dx$ und $\int x^n . \cos^m x \sin^6 x\, dx$.

I. Wenn p ungerade, so erhalten die Reductionsintegrale die Form

$$a\int x^{n-1} . \cos^{m+p} x\, dx + b\int x^{n-3} . \cos^{m+p} x\, dx + c\int x^{n-5} . \cos^{m+p} x\, dx + f\int x^{n-7} . \cos^{m+p} x\, dx + \ldots\ldots + g\int x^{n-p} . \cos^{m+p} x\, dx$$

1. Wenn $p = 1$ im $\int x^n . \cos^m x \sin^p x\, dx$, so ist $a = \frac{n}{m+1}$. Aus der allgemeinen Entwickelung des $\int x^n . \cos^m x \sin^p x\, dx$ würde ich also diesen Coëfficienten erhalten, wenn ich denjenigen Coëfficienten hierfür nehme, welcher auf das

mit $\overset{m+p}{\cos}x$ multiplicirte Glied folgen würde, wenn die Glieder (ausser den Reductionsintegralen) des Integrales nicht schon mit diesem abschliessen würden; indess müsste alsdann der höchste Factor dieses Coëfficienten, also $(m+2)$, fortgelassen werden. Soll aber diese Annahme richtig sein, so müsste,

2) wenn $p = 3$, der Coëfficient des $\int x^{n-1} . \overset{m+p}{\cos} x . dx$, nämlich

$a = \frac{n\{(p-1)(m+2) + (p-2)(m+3)\}}{(m+1)(m+2)(m+3)}$ werden, wobei wieder im Nenner $(m+4)$ fortgelassen ist.

In der That, wenn $p = 3$, so ist $(p-1)(m+2) + (p-2)(m+3) = 2(m+2) + 1.(m+3) = 2m + 4 + m + 3$
$= 3m + 7$, daher

$a = \frac{n(3m+7)}{(m+1)(m+2)(m+3)}$, welches mit dem Resultat des $\int x^n . \overset{m}{\cos} x \overset{3}{\sin} x \, dx$ übereinstimmt.

3) Wenn $p = 5$, so müsste demnach $a = \frac{n\{(p-1)(p-3)(m+2)(m+4) + (p-1)(p-4)(m+2)(m+5) + (p-2)(p-4)(m+3)(m+5)\}}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)}$ sein.

Es ist nun $(p-1)(p-3)(m+2)(m+4) + (p-1)(p-4)(m+2)(m+5) + (p-2)(p-4)(m+3)(m+5)$, wenn $p = 5$
$= 4.2(m+2)(m+4) + 4.1(m+2)(m+5) + 3.1(m+3)(m+5) = 4(m+2)\{2(m+4) + (m+5)\} + 3(m+3)(m+5)$
$= 4(m+2)(2m+8+m+5) + 3(m+3)(m+5) = 3(m+3)(m+5) + 4(m+2)(3m+13)$ daher

$a = \frac{n\{3(m+3)(m+5) + 4(m+2)(3m+13)\}}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)}$ welches mit dem Resultat des $\int x^n . \overset{m}{\cos} x \overset{5}{\sin} x \, dx$ übereinstimmt.

4) Wenn $p = 1$, so ist b nämlich der Coëfficient des $\int x^{n-3} . \overset{m+p}{\cos} x \, dx$,

$b = 0$, weil die Reductionsintegrale von der Form $\int x^n . \overset{m}{\cos} x \, dx$ überhaupt mit $\int x^{n-p} . \overset{m+p}{\cos} x \, dx$ abschliessen.

5) Wenn $p = 3$, so ist $b = \frac{n(n-1)(n-2)}{(m+1)(m+2)(m+3)}$. Aus der allgemeinen Entwickelung des $\int x^n . \overset{m}{\cos} x \overset{p}{\sin} x \, dx$ erhalte ich diesen Coëfficienten also, wenn ich den 2ten Coëfficienten desjenigen Gliedes hierfür nehme, welches auf das mit $\overset{m+p}{\cos} x$ multiplicirte Glied folgen würde; nur müsste alsdann der höchste Faktor $(m+4)$, des Nenners dieses Coëfficienten $\frac{n(n-1)(n-2)}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)}$ wieder fortgelassen werden. Soll aber diese Annahme, welche übrigens auch mit No. 4) übereinstimmt, zutreffend sein, so müsste auch

6) wenn $p = 5$, $b = \frac{n(n-1)(n-2)\{(p-1)(m+2) + (p-2)(m+3) + (p-3)(m+4) + (p-4)(m+5)\}}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)}$ sein. Das ist auch der Fall, denn es ist

$(p-1)(m+2) + (p-2)(m+3) + (p-3)(m+4) + (p-4)(m+5)$, wenn $p = 5$,
$= 4(m+2) + 3(m+3) + 2(m+4) + 1(m+5) = 4m + 8 + 3m + 9 + 2m + 8 + m + 5$
$= 10m + 30$ also

$b = \frac{n(n-1)(n-2)(10m+30)}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)}$ welches mit dem Resultat für $\int x^n . \overset{m}{\cos} x \overset{5}{\sin} x \, dx$ übereinstimmt.

7) Wenn $p = 1$, so ist der Coëfficient des $\int x^{n-5} . \overset{m+p}{\cos} x \, dx$, nämlich
$c = 0$. Ebenfalls ist

8) Wenn $p = 3$ ist, $c = 0$, da die Reductionsintegrale mit $\int x^{n-p} . \overset{m+p}{\cos} x \, dx$ abschliessen.

9) Wenn $p = 5$, so ist $c = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)}$

Also auch die Coëfficienten der dritten Reductionsintegrale erhalte ich, wenn ich hierfür den dritten Coëfficienten desjenigen Gliedes nehme, welches auf das mit $\overset{m+p}{\cos} x$ multiplicirte folgen würde, freilich mit Fortlassung des höchsten Factors des Nenners dieses Coëfficienten.

Ich kann daher die Coëfficienten der Reductionsintegrale, wenn p ungerade, als bekannt betrachten.

Wenn $p = 9$, so würden die Reductionsintegrale folgende sein

$$a\int x^{n-1} . \cos^{m+9} x \, dx + b\int x^{n-3} . \cos^{m+9} x \, dx + c\int x^{n-5} . \cos^{m+9} x \, dx + f\int x^{n-7} . \cos^{m+9} x \, dx + g\int x^{n-9} . \cos^{m+9} x \, dx$$

Hierbei wären aus der mit $\cos^{m+10} x \sin^{p-10} x$ multiplicirten Summe die Coëfficienten a, b, c, f und g leicht zu finden; a wäre der Coëfficient von x^{n-1}, ohne $(m+10)$ im Nenner, also

$$a = \frac{n\left\{\begin{array}{r}384(m+2)(m+4)(m+6)(m+8) + 192(m+2)(m+4)(m+6)(m+9) + 144(m+2)(m+4)(m+7)(m+9) \\ + 120(m+2)(m+5)(m+7)(m+9) + 105(m+3)(m+5)(m+7)(m+9)\end{array}\right\}}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)(m+7)(m+8)(m+9)}$$

ferner wäre b gleich dem Coëfficienten von x^{n-3} ohne $(m+10)$ im Nenner, c gleich dem Coëff. von x^{n-5} ohne $(m+10)$ im Nenner, f gleich dem Coëff. von x^{n-7} ohne $(m+10)$ im Nenner, und endlich g gleich dem Coëff. von x^{n-9} ohne $(m+10)$ im Nenner.

II. Wenn p gerade, so erhalten die Reductionsintegrale folgende Form:

$$a,\int x^{n} . \cos^{m+p} x \, dx + b,\int x^{n-2} . \cos^{m+p} x \, dx + c,\int x^{n-4} . \cos^{m+p} x \, dx + f,\int x^{n-6} . \cos^{m+p} x \, dx + \ldots\ldots + g,\int x^{n-p} . \cos^{m+p} x \, dx$$

und auch in diesem Falle finde ich die Coëfficienten a, b, c, f, g, ganz in derselben Weise, als wenn p ungerade, aus der allgemeinen Entwickelung des $\int x^{n} . \cos^{m} x \sin^{p} x \, dx$

1) Wenn $p = 2$, so müsste, nach den Coëfficienten der Reductionsintegrale, wenn p ungerade, zu schliessen, $a, = \frac{p-1}{m+1}$ sein, nämlich gleich dem Coëfficienten des auf $\cos^{m+p} x$ folgenden Gliedes, mit Fortlassung des höchsten Factors des Nenners desselben. Dieses ist aber der Fall;

denn wenn $p = 2$, so ist $a, = \frac{1}{m+1}$, welches mit dem Resultat für $\int x^{n} . \cos^{m} x \sin^{2} x \, dx$ übereinstimmt.

2) Wenn $p = 4$, so müsste $a, = \frac{(p-1)(p-3)}{(m+1)(m+3)}$ sein, welches auch, da $a, = \frac{3}{(m+1)(m+3)}$, richtig ist.

3) Wenn $p = 6$, so müsste $a, = \frac{(p-1)(p-3)(p-5)}{(m+1)(m+3)(m+5)}$ sein, oder $a, = \frac{15}{(m+1)(m+3)(m+5)}$, welches richtig ist.

4) Wenn $p = 2$, so müsste der Coëfficient des $\int x^{n-2} . \cos^{m+p} x \, dx$, nämlich

$b, = \frac{n(n-1)}{(m+1)(m+2)}$ sein, welches auch der Fall ist.

5) Wenn $p = 4$, so müsste $b, = \frac{n(n-1)\{(p-1)(m+2) + (p-2)(m+3) + (p-3)(m+4)\}}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)}$ sein.

Es ist aber $(p-1)(m+2) + (p-2)(m+3) + (p-3)(m+4) = 3(m+2) + 2(m+3) + m + 4$
$= 3m + 6 + 2m + 6 + m + 4 = 6m + 16$, daher

$b, = \frac{n(n-1)(6m+16)}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)}$, welches richtig ist.

6) Wenn $p = 6$, so müsste sein $b, = \frac{n(n-1)\left\{\begin{array}{l}(p-1)(p-3)(m+2)(m+4) + (p-1)(p-4)(m+2)(m+5) \\ + (p-1)(p-5)(m+2)(m+6) + (p-2)(p-4)(m+3)(m+5) \\ + (p-2)(p-5)(m+3)(m+6) + (p-3)(p-5)(m+4)(m+6)\end{array}\right\}}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)}$

Die Summe des Zählers ist aber $=$

$$5.3(m+2)(m+4) + 5.2(m+2)(m+5) + 5.(m+2)(m+6) + 4.2(m+3)(m+5) + 4.(m+3)(m+6) + 3.(m+4)(m+6)$$
$$= 5(m+2)\{3(m+4) + 2(m+5) + m + 6\} + 4(m+3)\{2(m+5) + m + 6\} + 3(m+4)(m+6)$$
$$= 5(m+2)(6m+28) + 4(m+3)(3m+16) + 3(m+4)(m+6), \text{ daher}$$

$b, = \frac{n(n-1)\{3(m+4)(m+6) + 4(m+3)(3m+16) + 5(m+2)(6m+28)\}}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)}$, welches richtig ist.

7) Wenn $p = 2$, so müsste der Coëfficient des $\int x^{n-4} . \cos^{m+p} x \, dx$, nämlich

$c, = 0$ sein, welches auch der Fall ist, da die Reductionsintegrale mit $\int x^{n-p} . \cos^{m+p} x \, dx$ abschliessen.

8) Wenn $p = 4$, so müsste $c, = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)}$ sein, welches auch richtig ist.

9) Wenn $p = 6$, so müsste $c, = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\{(p-1)(m+2) + (p-2)(m+3) + (p-3)(m+4) + (p-4)(m+5) + (p-5)(m+6)\}}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)}$

sein. Es ist aber $(p-1)(m+2) + (p-2)(m+3) + (p-3)(m+4) + (p-4)(m+5) + (p-5)(m+6)$

$$= 5(m+2) + 4(m+3) + 3(m+4) + 2(m+5) + 1(m+6)$$

$$= 5m + 10 + 4m + 12 + 3m + 12 + 2m + 10 + m + 6 = 15m + 50 \text{ daher}$$

$c, = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(15m+50)}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)}$ welches auch mit dem Resultat für $\int x^{n} . \cos^{m} x \sin^{6} x \, dx$ in völliger Uebereinstimmung ist.

Wenn daher $p = 8$ ist, so ist die Form der Reductionsintegrale

$$a, \int x^{n} . \cos^{m+8} x \, dx + b, \int x^{n-2} . \cos^{m+8} x \, dx + c, \int x^{n-4} . \cos^{m+8} x \, dx + f, \int x^{n-6} . \cos^{m+8} x \, dx + g, \int x^{n-8} . \cos^{m+8} x \, dx$$

und sind die 5 Coëfficienten dieser Integrale in der allgemeinen Entwickelung des $\int x^{n} . \cos^{m} x \sin^{p} x \, dx$ der mit $\cos^{m+9} x . \sin^{p-9} x$ multiplicirten Summe zu entnehmen; es sind die Coëfficienten der Potenzen x^{n}, x^{n-2}, x^{n-4}, x^{n-6} und x^{n-8}, bei denen im Zähler $p = 8$ zu substituiren und im Nenner die Grösse $(m+9)$ wegzulassen ist.

Ich kann also das $\int x^{n} . \cos^{m} x \sin^{p} x \, dx$ als bekannt betrachten, soweit es die Beschaffenheit der Grössen n, m und p zulässt. Ohne aber auf eine nähere Determination der allgemeinen Entwickelung des $\int x^{n} . \cos^{m} x \sin^{p} x \, dx$ einzugehn, werde ich schliesslich noch einen kürzern und praktischern Weg einschlagen, um dieses Integral zu entwickeln.

§. 12.

I. Es möge p gerade sein, also $p = 2q$, dann ist

$$\int x^{n} . \cos^{m} x \sin^{p} x \, dx = \int x^{n} . \cos^{m} x \sin^{2q} x \, dx = \int x^{n} . \cos^{m} x \left(1 - \cos^{2} x\right)^{q} dx$$

$$= \int x^{n} . \cos^{m} x \left\{1 - \frac{q}{1} \cos^{2} x + \frac{q(q-1)}{1.\,2} \cos^{4} x - \frac{q(q-1)(q-2)}{1.\,2.\,3.} \cos^{6} x \ldots . \right\} dx$$

$$= \int x^{n} . \cos^{m} x \, dx - \frac{q}{1} \int x^{n} . \cos^{m+2} x \, dx + \frac{q(q-1)}{1.\,2} \int x^{n} . \cos^{m+4} x \, dx - \frac{q(q-1)(q-2)}{1.\,2.\,3} \int x^{n} . \cos^{m+6} x \, dx \ldots \ldots$$

Weil aber $q = \frac{p}{2}$, so ist wenn <u>p gerade:</u>

$$\int x^{n} . \cos^{m} x \sin^{p} x \, dx = \int x^{n} . \cos^{m} x \, dx - \frac{p}{2} \int x^{n} . \cos^{m+2} x \, dx + \frac{p(p-2)}{4(1.\,2)} \int x^{n} . \cos^{m+4} x \, dx$$

$$- \frac{p(p-2)(p-4)}{8(1.\,2.\,3)} \int x^{n} . \cos^{m+6} x \, dx + \frac{p(p-2)(p-4)(p-6)}{16(1.\,2.\,3.\,4)} \int x^{n} . \cos^{m+8} x \, dx \ldots \ldots .$$

welche Reductionsintegrale dem Resultat des §. 10 leicht zu entnehmen sind.

II. Wenn p ungerade, also $p = 2q - 1$, so ist

$$\int x^n \cdot \cos^m x \sin^p x \, dx = \int x^n \cdot \cos^m x \sin^{2q-1} x \, dx = \int x^n \cdot \cos^m x \sin^{2q-2+1} x \, dx = \int x^n \cdot \cos^m x \sin x \sin^{2(q-1)} x \, dx$$

$$= \int x^n \cdot \cos^m x \sin x \left(1 - \cos^2 x\right)^{q-1} dx$$

$$= \int x^n \cdot \cos^m x \sin x \left\{ 1 - \frac{(q-1)}{1} \cos^2 x + \frac{(q-1)(q-2)}{1.\ 2} \cos^4 x - \frac{(q-1)(q-2)(q-3)}{1.\ 2.\ 3} \cos^6 x \ldots\ldots \right\} dx$$

$$= \int x^n \cdot \cos^m x \sin x \, dx - \left(\frac{q-1}{1}\right) \int x^n \cdot \cos^{m+2} x \sin x \, dx + \frac{(q-1)(q-2)}{1.\ 2} \int x^n \cdot \cos^{m+4} x \sin x \, dx - \frac{(q-1)(q-2)(q-3)}{1.\ 2.\ 3} \int x^n \cdot \cos^{m+6} x \sin x \, dx$$

. . . . Weil aber $q = \frac{p+1}{2}$, $q - 1 = \frac{p-1}{2}$, $q - 2 = \frac{p-3}{2}$, $q - 3 = \frac{p-5}{2}$ u. s. w., so ist

$$\int x^n \cdot \cos^m x \sin^p x \, dx = \int x^n \cdot \cos^m x \sin x \, dx - \left(\frac{p-1}{2}\right) \int x^n \cdot \cos^{m+2} x \sin x \, dx + \left(\frac{1}{4}\right) \frac{(p-1)(p-3)}{1.\ 2} \int x^n \cdot \cos^{m+4} x \sin x \, dx$$

$$- \left(\frac{1}{8}\right) \frac{(p-1)(p-3)(p-5)}{1.\ 2.\ 3} \int x^n \cdot \cos^{m+6} x \sin x \, dx + \left(\frac{1}{16}\right) \frac{(p-1)(p-3)(p-5)(p-7)}{1.\ 2.\ 3.\ 4} \int x^n \cdot \cos^{m+8} x \sin x \, dx \ldots\ldots\ldots$$

Diese Integrale sind dem Anfang des § 11. leicht zu entnehmen, und es ist

$$\int x^n \cdot \cos^m x \sin x \, dx = - \frac{x^n \cdot \cos^{m+1} x}{m+1} + \left(\frac{n}{m+1}\right) \int x^{n-1} \cdot \cos^{m+1} x \, dx$$

$$\int x^n \cdot \cos^{m+2} x \sin x \, dx = - \frac{x^n \cdot \cos^{m+3} x}{m+3} + \left(\frac{n}{m+3}\right) \int x^{n-1} \cdot \cos^{m+3} x \, dx$$

$$\int x^n \cdot \cos^{m+4} x \sin x \, dx = - \frac{x^n \cdot \cos^{m+3} x}{m+5} + \left(\frac{n}{m+3}\right) \int x^{n-1} \cdot \cos^{m+3} x \, dx$$

$$\int x^n \cdot \cos^{m+6} x \sin x \, dx = - \frac{x^n \cdot \cos^{m+7} x}{m+7} + \left(\frac{n}{m+7}\right) \int x^{n-1} \cdot \cos^{m+7} x \, dx$$ u. s. w. Es ist daher

$$\int x^n \cdot \cos^m x \sin^p x \, dx = - \frac{x^n \cdot \cos^{m+1} x}{m+1} + \left(\frac{n}{m+1}\right) \int x^{n-1} \cdot \cos^{m+1} x \, dx + \frac{(p-1)}{2} \cdot \frac{x^n \cdot \cos^{m+3} x}{(m+3)} - \frac{(p-1)\, n}{2\, (m+3)} \int x^{n-1} \cdot \cos^{m+3} x \, dx$$

$$- \left(\frac{1}{4}\right) \frac{(p-1)(p-3)}{1.\ 2} \cdot \frac{x^n \cdot \cos^{m+3} x}{(m+3)} + \left(\frac{1}{4}\right) \cdot \frac{(p-1)(p-3) \cdot n}{1.\ 2\ (m+3)} \int x^{n-1} \cdot \cos^{m+5} x \, dx + \left(\frac{1}{8}\right) \cdot \frac{(p-1)(p-3)(p-5)}{1.\ 2.\ 3} \cdot \frac{x^n \cdot \cos^{m+7} x}{(m+7)}$$

$$- \left(\frac{1}{8}\right) \frac{(p-1)(p-3)(p-5) \cdot n}{1.\ 2.\ 3\ (m+7)} \int x^{n-1} \cdot \cos^{m+7} x \, dx \ldots\ldots\ldots$$ Folglich entsteht:

II. <u>wenn p ungerade:</u>

$$\int x^n \cdot \cos^m x \sin^p x \, dx = - x^n \cdot \cos^{m+1} x \left\{ \frac{1}{m+1} - \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{(p-1) \cdot \cos^2 x}{1.\ \ m+3} + \left(\frac{1}{4}\right) \cdot \frac{(p-1)(p-3) \cos^4 x}{1.\ 2\ \ m+5} - \left(\frac{1}{8}\right) \cdot \frac{(p-1)(p-3)(p-5) \cos^6 x}{1.\ 2.\ 3\ \ m+7} \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{16}\right) \cdot \frac{(p-1)(p-3)(p-5)(p-7) \cos^8 x}{1.\ 2.\ 3.\ 4\ (m+9)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \right\}$$

$$+ \left(\frac{n}{m+1}\right) \int x^{n-1} \cdot \cos^{m+1} x \, dx - \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{n\ (p-1)}{(m+3)} \int x^{n-1} \cdot \cos^{m+3} x \, dx + \left(\frac{1}{4}\right) \cdot \frac{n\ (p-1)(p-3)}{(m+3)\ 1.\ 2} \int x^{n-1} \cdot \cos^{m+3} x \, dx$$

$$- \left(\frac{1}{8}\right) \cdot \frac{n\ (p-1)(p-3)(p-5)}{(m+7)\ 1.\ 2.\ 3} \int x^{n-1} \cdot \cos^{m+7} x \, dx + \left(\frac{1}{16}\right) \cdot \frac{n\ (p-1)(p-3)(p-5)(p-7)}{(m+9)\ 1.\ 2.\ 3.\ 4} \int x^{n-1} \cdot \cos^{m+9} x \, dx \ldots\ldots$$

Diese Integrale sind dem Resultat des § 10. leicht zu entnehmen. Vorher war

I. <u>wenn p gerade:</u>

$$\int x^n \cdot \cos^m x \sin^p x \, dx = \int x^n \cdot \cos^m x \, dx - \frac{p}{2} \int x^n \cdot \cos^{m+2} x \, dx + \left(\frac{1}{4}\right) \cdot \frac{p\ (p-2)}{1.\ 2} \int x^n \cdot \cos^{m+4} x \, dx$$

$$- \left(\frac{1}{8}\right) \cdot \frac{p\ (p-2)(p-4)}{1.\ 2.\ 3} \int x^n \cdot \cos^{m+6} x \, dx + \left(\frac{1}{16}\right) \cdot \frac{p\ (p-2)(p-4)(p-6)}{1.\ 2.\ 3.\ 4} \int x^n \cdot \cos^{m+8} x \, dx \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

1) Es sei z. B. $p = 6$, dann ist

$$\int x^n . \cos^m x \sin^6 x\, dx = \int x^n . \cos^m x\, dx - 3\int x^n . \cos^{m+2} x\, dx + \left(\tfrac{1}{4} . \tfrac{6.\,4}{1.\,2}\right)\int x^n . \cos^{m+4} x\, dx - \left(\tfrac{1}{8} . \tfrac{6.\,4.\,2}{1.\,2.\,3}\right)\int x^n . \cos^{m+6} x\, dx$$

$$= \int x^n . \cos^m x\, dx - 3\int x^n . \cos^{m+2} x\, dx + 3\int x^n . \cos^{m+4} x\, dx - \int x^n . \cos^{m+6} x\, dx$$

2) Wenn z. B. $p = 8$, so ist

$$\int x^n . \cos^m x \sin^8 x\, dx = \int x^n . \cos^m x\, dx - 4\int x^n . \cos^{m+2} x\, dx + 6\int x^n . \cos^{m+4} x\, dx - 4\int x^n . \cos^{m+6} x\, dx + \int x^n . \cos^{m+8} x\, dx$$

3) Wenn $p = 5$, so ist

$$\int x^n . \cos^m x \sin^5 x\, dx = - x^n . \cos^{m+1} x \left\{\tfrac{1}{m+1} - \tfrac{2\cos^2 x}{m+3} + \tfrac{\cos^4 x}{m+5}\right\} + \left(\tfrac{n}{m+1}\right)\int x^{n-1} . \cos^{m+1} x\, dx - \left(\tfrac{2n}{m+3}\right)\int x^{n-1} . \cos^{m+3} x\, dx$$

$$+ \left(\tfrac{n}{m+5}\right)\int x^{n-1} . \cos^{m+3} x\, dx$$

4) Es sei $n = 2$, $m = 3$, $p = 4$, dann entsteht

$$\int x^2 . \cos^3 x \sin^4 x\, dx = \int x^2 . \cos^3 x\, dx - 2\int x^2 . \cos^3 x\, dx + \left(\tfrac{1.\,4.\,2}{4.\,1.\,2}\right)\int x^2 . \cos^7 x\, dx$$

oder

$$\int x^2 . \cos^3 x \sin^4 x\, dx = \int x^2 . \cos^3 x\, dx - 2\int x^2 . \cos^3 x\, dx + \int x^2 . \cos^7 x\, dx$$

Wenn nun im $\int x^n . \cos^m x\, dx$ des § 10. $n = 2$, und $m = 3$ angenommen wird, so ist

1) $$\int x^2 . \cos^3 x\, dx = \tfrac{2}{9}\, x \cos^3 x + \tfrac{1}{3}\left(x^2 - \tfrac{2}{9}\right) \cos^2 x \sin x + \tfrac{4}{3}\, x \cos x + \tfrac{2}{3}\left(x^2 - \tfrac{20}{9}\right) \sin x + C.$$

Ferner sei im $\int x^n . \cos^m x\, dx$ $n = 2$, $m = 5$, dann ist

$$\int x^2 . \cos^5 x\, dx = \tfrac{2}{25}\, x \cos^3 x + \tfrac{1}{3}\left(x^2 - \tfrac{2}{25}\right) \cos^4 x \sin x + \tfrac{8}{43}\, x \cos^3 x + \tfrac{4}{13}\left(x^2 - \tfrac{68}{223}\right) \cos^2 x \sin x$$

$$+ \tfrac{16}{13}\, x \cos x + \tfrac{8}{13}\left(x^2 - \tfrac{318}{223}\right) \sin x + C$$

folglich auch

2) $$(-2)\int x^2 . \cos^5 x\, dx = -\tfrac{4}{25}\, x \cos^5 x - \tfrac{2}{3}\left(x^2 - \tfrac{2}{25}\right) \cos^4 x \sin x - \tfrac{16}{43}\, x \cos^3 x - \tfrac{8}{13}\left(x^2 - \tfrac{68}{225}\right) \cos^2 x \sin x$$

$$- \tfrac{32}{13}\, x \cos x - \tfrac{16}{15}\left(x^2 - \tfrac{518}{225}\right) \sin x + C.$$

Endlich ist

3) $$\int x^2 . \cos^7 x\, dx = \tfrac{2}{49}\, x \cos^7 x + \tfrac{1}{7}\left(x^2 - \tfrac{2}{49}\right) \cos^6 x \sin x + \tfrac{12}{175}\, x \cos^3 x + \tfrac{6}{35}\left(x^2 - \tfrac{148}{1225}\right) \cos^4 x \sin x$$

$$+ \tfrac{16}{105}\, x \cos^3 x + \tfrac{8}{33} \cos^2 x \sin x \left(x^2 - \tfrac{3782}{11025}\right) + \tfrac{32}{33}\, x \cos x + \tfrac{16}{33}\left(x^2 - \tfrac{23832}{11083}\right) \sin x + C.$$

Es ist daher

$$y = \int x^2 . \cos^3 x \sin^4 x\, dx = \tfrac{2}{49}\, x \cos^7 x + \left(\tfrac{1}{7}\, x^2 - \tfrac{2}{343}\right) \cos^6 x \sin x - \tfrac{16}{175}\, x \cos^3 x - \left(\tfrac{8}{33}\, x^2 - \tfrac{484}{42875}\right) \cos^4 x \sin x$$

$$+ \tfrac{2}{105}\, x \cos^3 x + \left(\tfrac{1}{33}\, x^2 + \tfrac{5358}{385875}\right) \cos^2 x \sin x + \tfrac{4}{33}\, x \cos x + \left(\tfrac{2}{33}\, x^2 - \tfrac{57384}{385875}\right) \sin x + C.$$

Dann müsste aber auch sein

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{7}\,x\cos^6 x\sin x + \frac{2}{49}\cos^7 x + \left(\frac{1}{7}x^2 - \frac{2}{343}\right)\cos^7 x - \left(\frac{1}{7}x^2 - \frac{2}{343}\right)\sin^2 x \,.\, 6\cos^5 x + \cos^6 x\sin x\left(\frac{2}{7}x\right)$$
$$+ \frac{16}{175}x \,.\, 5\cos^4 x\sin x - \frac{16}{175}\cos^5 x - \left(\frac{8}{35}x^2 - \frac{484}{42875}\right)\cos^3 x + \left(\frac{8}{35}x^2 - \frac{484}{42875}\right)\sin^2 x \,.\, 4\cos^5 x$$
$$- \cos^4 x\sin x\left(\frac{8}{35}\,.\,2x\right) - \frac{2}{105}x \,.\, 3\cos^2 x\sin x + \frac{2}{105}\cos^3 x + \left(\frac{1}{35}x^2 + \frac{3358}{385875}\right)\cos^3 x$$
$$- \left(\frac{1}{35}x^2 + \frac{3358}{385875}\right)\sin^2 x \,.\, 2\cos x + \cos^2 x\sin x \,.\left(\frac{1}{35}\,.\,2x\right) - \frac{4}{35}x\sin x + \frac{4}{35}\cos x$$
$$+ \left(\frac{2}{35}x^3 - \frac{57384}{385875}\right)\cos x + \sin x \,.\left(\frac{2}{35}\,.\,2x\right)$$

oder auch, wenn ich diesen Differentialquotienten mit der Berücksichtigung ordne, dass $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{7}x\cos^6 x\sin x + \frac{2}{49}\cos^7 x + \frac{1}{7}x^2\cos^7 x - \frac{6}{7}x^2\cos^5 x + \frac{12}{343}\cos^5 x + \frac{16}{35}x\cos^4 x\sin x$$
$$+ \frac{2}{7}x\cos^6 x\sin x - \frac{2}{343}\cos^7 x + \frac{6}{7}x^2\cos^7 x - \frac{8}{35}x^2\cos^5 x - \frac{16}{175}\cos^5 x - \frac{16}{35}x\cos^4 x\sin x$$
$$- \frac{12}{343}\cos^7 x \qquad - \frac{32}{35}x^2\cos^3 x + \frac{484}{42875}\cos^3 x$$
$$+ \frac{1956}{42875}\cos^5 x$$

$$+ \frac{32}{35}x^2\cos^5 x - \frac{1956}{42875}\cos^3 x - \frac{2}{35}x\cos^2 x\sin x - \frac{2}{35}x^2\cos x - \frac{6716}{385875}\cos x - \frac{4}{35}x\sin x$$
$$+ \frac{1}{35}x^2\cos^3 x + \frac{2}{105}\cos^5 x + \frac{2}{35}x\cos^2 x\sin x + \frac{2}{35}x^2\cos x + \frac{4}{35}\cos x + \frac{4}{35}x\sin x$$
$$+ \frac{2}{35}x^2\cos^3 x + \frac{3358}{385875}\cos^3 x \qquad - \frac{57384}{385875}\cos x$$
$$+ \frac{6716}{385875}\cos^3 x$$

Es ist also:

$$\frac{dy}{dx} = x^2\cos^7 x - 2x^2\cos^5 x + x^2\cos^3 x = x^2\cos^7 x - x^2\cos^5 x - x^2\cos^5 x + x^2\cos^3 x$$

$= -x^2\cos^5 x\,(1 - \cos^2 x) + x^2\cos^3 x\,(1 - \cos^2 x) = x^2\cos^3 x\sin^2 x\,(1 - \cos^2 x) = x^2\cos^3 x\sin^4 x$, daher es mit dem Integral seine Richtigkeit hat.

5) Es sei im $\int x^n \,.\, \cos^m x\sin^p x\,dx$ für p ungerade, also in No. II. $n = 0$, so ist

$$\int \cos^m x\sin^p x\,dx = -\cos^{m+1} x\left\{\frac{1}{m+1} - \left(\frac{1}{2}\right)\frac{p-1}{1}\,\frac{\cos^2 x}{m+3} + \left(\frac{1}{4}\right)\frac{p-1}{1}\,\frac{p-3}{2}\,\frac{\cos^4 x}{m+5} - \left(\frac{1}{8}\right)\frac{p-1}{1}\,\frac{p-3}{2}\,\frac{p-5}{3}\,\frac{\cos^6 x}{m+7}\,\ldots\ldots\right\} + C$$

oder, wenn ich eine andere Bezeichnung für die Exponenten wähle:

$$\int \sin^m x\cos^n x\,dx = -\cos^{n+1} x\left\{\frac{1}{n+1} - \left(\frac{1}{2}\right)\frac{m-1}{1}\,\frac{\cos^2 x}{n+3} + \left(\frac{1}{4}\right)\frac{m-1}{1}\,\frac{m-3}{2}\,\frac{\cos^4 x}{n+5} - \left(\frac{1}{8}\right)\frac{m-1}{1}\,\frac{m-3}{2}\,\frac{m-5}{3}\,\frac{\cos^6 x}{n+7}\,\ldots\ldots\right\} + C.$$

(cf. § 5.)

Wenn z. B. $m = 1$, so ist

$$\int \sin x\cos^n x\,dx = -\frac{\cos^{n+1} x}{n+1} + C.$$

Wenn $m = 3$, so ist $\int \sin^3 x \cos^n x \, dx = -\cos^{n+1} x \left\{\frac{1}{n+1} - \frac{\cos^2 x}{n+3}\right\} + C.$

Wenn $m = 5$, so ist $\int \sin^5 x \cos^n x \, dx = -\cos^{n+1} x \left\{\frac{1}{n+1} - \frac{2\cos^2 x}{n+3} + \frac{\cos^4 x}{n+5}\right\} + C.$

Wenn $m = 7$, so ist $\int \sin^7 x \cos^n x \, dx = -\cos^{n+1} x \left\{\frac{1}{n+1} - \frac{3\cos^2 x}{n+3} + \frac{3\cos^4 x}{n+5} - \frac{\cos^6 x}{n+7}\right\} + C$ u. s. w.

6) Es sei im $\int x^n \cos^m x \sin^p x \, dx$ für p gerade, also in No. 1, $n = o$, dann ist

$$\int \cos^m x \sin^p x \, dx = \int \cos^m x \, dx - \frac{p}{2} \int \cos^{m+2} x \, dx + \left(\frac{1}{4}\right) \frac{p(p-2)}{1 \cdot 2} \int \cos^{m+4} x \, dx - \left(\frac{1}{8}\right) \frac{p(p-2)(p-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \int \cos^{m+6} x \, dx \ldots$$

oder, wenn ich eine andere Bezeichnung wähle:

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx = \int \cos^n x \, dx - \left(\frac{m}{2}\right) \int \cos^{n+2} x \, dx + \left(\frac{1}{4}\right) \frac{m(m-2)}{1 \cdot 2} \int \cos^{n+4} x \, dx - \left(\frac{1}{8}\right) \frac{m(m-2)(m-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \int \cos^{n+6} x \, dx \ldots$$

Wenn z. B. $m = 4$, so ist

$$\int \sin^4 x \cos^n x \, dx = \int \cos^n x \, dx - 2 \int \cos^{n+2} x \, dx + \int \cos^{n+4} x \, dx.$$

Anhang.

I. Es möge noch ein Beispiel gerechnet werden. Im $\int x^n . \cos^m x \, dx$ sei $m = 8$, dann habe ich das Verfahren einzuschlagen, welches am Schluss des § 10. angegeben ist. Ich muss also in der allgemeinen Formel des $\int x^n . \cos^m x \, dx$ bis zu dem Gliede einschliesslich herabsteigen, welches mit $\cos x \sin x$ multiplicirt ist, und ausserdem noch eine Summe von der Form $a\frac{x^{n+1}}{n+1} + bn \left\{cx^{n-1} - \frac{(n-1)(n-2)}{m^2} fx^{n-3} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{m^4} gx^{n-5} \ldots\ldots\right\}$ hinzufügen.

Es ist nun von den ausserhalb der Summen befindlichen Coëfficienten

$$\frac{n}{m^2} = \frac{n}{64}, \quad \frac{1}{m} = \frac{1}{8}, \quad \frac{n(m-1)}{m(m-2)^2} = \frac{7n}{288}, \quad \frac{m-1}{m(m-2)} = \frac{7}{48}, \quad \frac{n(m-1)(m-3)}{m(m-2)(m-4)^2} = \frac{35n}{768}, \quad \frac{(m-1)(m-3)}{m(m-2)(m-4)} = \frac{35}{192},$$

$$\frac{n(m-1)(m-3)(m-5)}{m(m-2)(m-4)(m-6)^2} = \frac{35n}{256} \text{ und } \frac{(m-1)(m-3)(m-5)}{m(m-2)(m-4)(m-6)} = \frac{35}{128}$$

Ferner ist

$$\frac{m^2 + (m-2)^2}{(m-2)^2} = \frac{25}{9}, \quad \frac{m^4 + m^2(m-2)^2 + (m-2)^4}{(m-2)^4} = \frac{481}{81};$$

$$\frac{m^2(m-2)^2 + m^2(m-4)^2 + (m-2)^2(m-4)^2}{(m-2)^2(m-4)^2} = \frac{61}{9},$$

$$\frac{m^4(m-2)^4 + m^4(m-4)^4 + (m-2)^4(m-4)^4 + m^4(m-2)^2(m-4)^2 + m^2(m-2)^4(m-4)^2 + m^2(m-2)^2(m-4)^4}{(m-2)^4(m-4)^4} = \frac{2677}{81};$$

$$\frac{m^2(m-2)^2(m-4)^2 + m^2(m-2)^2(m-6)^2 + m^2(m-4)^2(m-6)^2 + (m-2)^2(m-4)^2(m-6)^2}{(m-2)^2(m-4)^2(m-6)^2} = \frac{205}{9}, \text{ endlich}$$

$$\left\{\frac{\begin{array}{l} m^4(m-2)^4(m-4)^4 + m^4(m-2)^4(m-4)^2(m-6)^2 + m^4(m-2)^4(m-6)^4 \\ + m^4(m-2)^2(m-4)^4(m-6)^2 + m^4(m-2)^2(m-4)^2(m-6)^4 + m^4(m-4)^4(m-6)^4 \\ + m^2(m-2)^4(m-4)^4(m-6)^2 + m^2(m-2)^4(m-4)^2(m-6)^4 + m^2(m-2)^2(m-4)^4(m-6)^4 + (m-2)^4(m-4)^4(m-6)^4 \end{array}}{(m-2)^4(m-4)^4(m-6)^4}\right\} = \frac{32197}{81}$$

Was nun die Summe ohne trigonometrische Factoren anbetrifft, so ist der Coëfficient a gleich dem Coëfficienten von $\cos x \sin x$, also in diesem Falle, da $m = 8$,

$$a = \frac{(m-1)(m-5)(m-5)}{m(m-2)(m-4)(m-6)} = \frac{55}{128}. \quad \text{Ferner ist } b = -a.\left(\frac{1}{m^2}\right). = -\frac{55}{128}.\frac{1}{64} = -\frac{35}{8192}$$

$$c = \frac{m^2(m-2)^2(m-4)^2 + m^2(m-2)^2(m-6)^2 + m^2(m-4)^2(m-6)^2 + (m-2)^2(m-4)^2(m-6)^2}{(m-2)^2(m-4)^2(m-6)^2} = \frac{205}{9}$$ nämlich gleich der vorhergehenden ersten quadratischen Summe dividirt durch die Producte der Quadrate der zugehörigen Differenzen — die Potenzen von m kommen also erst in den Nennern der folgenden Coëfficienten vor.

f ist gleich dem unvollständigen Quadrat von c, bei welchem ich also im Zähler die Binomialcoëfficienten fortzulassen habe; daher $f = \frac{32197}{81}$.

g ist der unvollständige Cubus von c, u. s. w. Demnach erhalte ich folgendes Integral:

$$\int x^n \cos^8 x\, dx = \frac{n}{64} \cos^8 x \left\{x^{n-1} - \frac{(n-1)(n-2)}{8^2} x^{n-3} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{8^4} x^{n-5} \ldots\ldots\right\}$$

$$+ \frac{1}{8} \cos^7 x \sin x \left\{x^n - \frac{n(n-1)}{8^2} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8^4} x^{n-4} \ldots\ldots\right\}$$

$$+ \frac{7n}{288} \cos^6 x \left\{x^{n-1} - \frac{(n-1)(n-2)}{8^2}\left(\frac{25}{9}\right) x^{n-3} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{8^4}\left(\frac{481}{81}\right) x^{n-5} \ldots\ldots\right\}$$

$$+ \frac{7}{48} \cos^5 x \sin x \left\{x^n - \frac{n(n-1)}{8^2}\left(\frac{25}{9}\right) x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8^4}\left(\frac{481}{81}\right) x^{n-4} \ldots\ldots\right\}$$

$$+ \frac{55n}{768} \cos^4 x \left\{x^{n-1} - \frac{(n-1)(n-2)}{8^2}\left(\frac{61}{9}\right) x^{n-3} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{8^4}\left(\frac{2677}{81}\right) x^{n-5} \ldots\ldots\right\}$$

$$+ \frac{35}{192} \cos^5 x \sin x \left\{x^n - \frac{n(n-1)}{8^2}\left(\frac{61}{9}\right) x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8^4}\left(\frac{2677}{81}\right) x^{n-4} \ldots\ldots\right\}$$

$$+ \frac{35n}{256} \cos^2 x \left\{x^{n-1} - \frac{(n-1)(n-2)}{8^2}\left(\frac{205}{9}\right) x^{n-3} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{8^4}\left(\frac{52197}{81}\right) x^{n-5} \ldots\ldots\right\}$$

$$+ \frac{55}{128} \cos x \sin x \left\{x^n - \frac{n(n-1)}{8^2}\left(\frac{205}{9}\right) x^{n-2} - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8^4}\left(\frac{32197}{81}\right) x^{n-4} \ldots\ldots\right\}$$

$$+ \left(\frac{35}{128}\right)\frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{35n}{8192} \left\{\frac{205}{9} x^{n-1} - \frac{(n-1)(n-2)}{8^2}\left(\frac{52197}{81}\right) x^{n-3} \ldots\ldots\ldots\ldots\right\} + C.$$

Wenn $n = 0$, so ist

$$\int \cos^8 x\, dx = \frac{1}{8} \cos^7 x \sin x + \frac{7}{48} \cos^5 x \sin x + \frac{35}{192} \cos^3 x \sin x + \frac{35}{128} \cos x \sin x + \frac{35}{128} x + C.$$

Wenn $n = 2$, so ist

$$y = \int x^2 \cos^8 x\, dx = \frac{1}{32} x \cos^8 x + \left(\frac{1}{8} x^2 - \frac{1}{256}\right) \cos^7 x \sin x + \frac{7}{144} x \cos^6 x + \left(\frac{7}{48} x^2 - \frac{175}{13824}\right) \cos^5 x \sin x$$

$$+ \frac{55}{384} x \cos^4 x + \left(\frac{35}{192} x^2 - \frac{2135}{55296}\right) \cos^5 x \sin x + \frac{55}{128} x \cos^2 x + \left(\frac{35}{128} x^2 - \frac{7175}{36864}\right) \cos x \sin x$$

$$+ \frac{55}{584} x^3 - \frac{7175}{56864} x + C.$$ Dann müsste aber auch sein

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{32} x . 8 \cos^7 x \sin x + \frac{1}{32} \cos^8 x + \left(\frac{1}{8} x^2 - \frac{1}{256}\right) \cos^8 x - \left(\frac{1}{8} x^2 - \frac{1}{256}\right) \sin^2 x . 7 \cos^6 x$$

$$+ \cos^7 x \sin x \left(\frac{1}{8} . 2x\right) - \frac{7}{144} x . 6 \cos^5 x \sin x + \frac{7}{144} \cos^6 x + \left(\frac{7}{48} x^2 - \frac{175}{15824}\right) \cos^6 x$$

$$- \left(\frac{7}{48} x^2 - \frac{175}{13824}\right) \sin^2 x . 5 \cos^4 x + \cos^5 x \sin x \left(\frac{7}{48} . 2x\right) - \frac{55}{584} x . 4 \cos^5 x \sin x + \frac{35}{384} \cos^4 x$$

$$+ \left(\frac{35}{192} x^2 - \frac{2155}{55296}\right) \cos^4 x - \left(\frac{35}{192} x^2 - \frac{2155}{55196}\right) \sin^2 x . 3 \cos^2 x + \cos^3 x \sin x \left(\frac{55}{192} . 2x\right)$$

$$- \frac{35}{128} x . 2 \cos x \sin x + \frac{55}{128} \cos^2 x + \left(\frac{55}{128} x^2 - \frac{7175}{56864}\right) \cos^2 x - \left(\frac{55}{128} x^2 - \frac{7175}{56864}\right) \sin^2 x$$

$$+ \cos x \sin x \left(\frac{35}{128} . 2x\right) + \frac{35}{584} . 3x^2 - \frac{7175}{56864}$$

oder, wenn ich diesen Differentialquotienten mit der Berücksichtigung ordne, dass $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} = &- \tfrac{1}{4}\, x \cos^7 x \sin x + \tfrac{1}{32} \cos^8 x + \tfrac{1}{8}\, x^2 \cos^8 x - \tfrac{7}{8}\, x^2 \cos^6 x + \tfrac{7}{256} \cos^6 x - \tfrac{7}{24}\, x \cos^3 x \sin x \\ &+ \tfrac{1}{4}\, x \cos^7 x \sin x - \tfrac{1}{256} \cos^8 x + \tfrac{7}{8}\, x^2 \cos^8 x + \tfrac{7}{48}\, x^2 \cos^6 x + \tfrac{7}{144} \cos^6 x + \tfrac{7}{24}\, x \cos^5 x \sin x \\ &- \tfrac{7}{236} \cos^8 x \qquad + \tfrac{35}{48}\, x^2 \cos^6 x - \tfrac{175}{13824} \cos^6 x \\ &\qquad\qquad - \tfrac{875}{13824} \cos^6 x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&- \tfrac{33}{48}\, x^2 \cos^4 x + \tfrac{873}{13824} \cos^4 x - \tfrac{35}{96}\, x \cos^3 x \sin x - \tfrac{33}{64}\, x^2 \cos^2 x + \tfrac{2133}{18432} \cos^2 x \\ &+ \tfrac{35}{192}\, x^2 \cos^4 x + \tfrac{35}{384} \cos^4 x + \tfrac{35}{96}\, x \cos^3 x \sin x + \tfrac{33}{128}\, x^2 \cos^2 x + \tfrac{33}{128} \cos^2 x \\ &+ \tfrac{35}{64}\, x^2 \cos^4 x - \tfrac{2135}{55296} \cos^4 x \qquad + \tfrac{33}{128}\, x^2 \cos^2 x - \tfrac{7375}{36864} \cos^2 x \\ &\qquad - \tfrac{2135}{18432} \cos^4 x \qquad - \tfrac{7373}{36864} \cos^2 x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&- \tfrac{33}{64}\, x \cos x \sin x - \tfrac{35}{128}\, x^2 + \tfrac{7375}{36864} \\ &+ \tfrac{35}{64}\, x \cos x \sin x + \tfrac{33}{128}\, x^2 - \tfrac{7373}{36864}\end{aligned}$$

oder vereinfacht:

$\frac{dy}{dx} = x^2 . \cos^8 x$, daher das Integral richtig ist.

II. Wenn im $\int x^n \cos^m x\, dx$ m gerade, so erhalten die letzten Glieder des Integrales die Form

$$\ldots\ldots\ldots + A \cos x \sin x \left\{x^n - \tfrac{n(n-1)}{m^2} B x^{n-2} \ldots\ldots\right\} + A \frac{x^{n+1}}{n+1} - A \left(\tfrac{1}{m^2}\right) n \left\{B x^{n-1} \ldots\ldots\right\} + C.$$

Ich erhalte also die Integrale der geraden Potenzen von $\cos x$ aus dem $\int x^n \cos^m x\, dx$, wenn ich n Null werden lasse, und es ist demgemäss, wenn m gerade:

$$\int \cos^m x\, dx = \tfrac{1}{m} \cos^{m-1} x \sin x + \tfrac{(m-1)}{m(m-2)} \cos^{m-3} x \sin x + \tfrac{(m-1)(m-3)}{m(m-2)(m-4)} \cos^{m-5} x \sin x + \tfrac{(m-1)(m-3)(m-5)}{m(m-2)(m-4)(m-6)} \cos^{m-7} x \sin x$$

$+ \ldots\ldots\ldots\ldots + A \cos x \sin x + A x + C$, wobei A der letzte Coëfficient der trigonometrischen Factoren ist. Wenngleich die Differenzen der Nenner der Coëfficienten die geraden Zahlen enthalten, so kann ich dem m dennoch gerade Werthe beilegen; denn wenn $m = 2$, so ist die Differenz $(m-2)$ in dem nächsten Gliede $\frac{(m-1)}{m(m-2)} \cos^{m-3} x \sin x$ deshalb unschädlich, weil $A \cos x \sin x$ das letzte der Glieder ist, welche trigonometrische Factoren enthalten, mithin von denselben, für den Fall $m = 2$, nur das eine $\frac{1}{2} \cos x \sin x$ vorkommen kann; A ist in diesem Fall also $= \frac{1}{2}$, daher $\int \cos^2 x\, dx = \frac{1}{2} \cos x \sin x + \frac{1}{2} x + C$.

Wenn $m = 10$, so ist

$$\begin{aligned}\int \cos^{10} x\, dx &= \tfrac{1}{10} \cos^9 x \sin x + \tfrac{9}{10.8} \cos^7 x \sin x + \tfrac{9.7}{10.8.6} \cos^3 x \sin x + \tfrac{9.7.3}{10.8.6.4} \cos^3 x \sin x \\ &+ \tfrac{9.7.3.3}{10.8.6.4.2} \cos x \sin x + \tfrac{9.7.3.3}{10.8.6.4.2}\, x + C \\ &= \tfrac{1}{10} \cos^9 x \sin x + \tfrac{9}{80} \cos^7 x \sin x + \tfrac{21}{160} \cos^3 x \sin x + \tfrac{21}{128} \cos^3 x \sin x + \tfrac{63}{256} \cos x \sin x + \tfrac{63}{256}\, x + C.\end{aligned}$$

Zugleich bemerke ich, dass die Formel für m gerade sich von derjenigen für m ungerade (§ 2. No. 2) nur durch das letzte Glied $A x$ unterscheidet.

Ebenso ist auch, wenn m gerade

$$\int \sin^m x \, . \, dx = -\tfrac{1}{m} \sin^{m-1} x \cos x - \tfrac{(m-1)}{m(m-2)} \sin^{m-3} x \cos x - \tfrac{(m-1)(m-3)}{m(m-2)(m-4)} \sin^{m-5} x \cos x - \tfrac{(m-1)(m-3)(m-5)}{m(m-2)(m-4)(m-6)} \sin^{m-7} x \cos x$$
$$- \ldots\ldots\ldots\ldots - A \sin x \cos x + A x + C,$$

und auch, wenn $\sin x = v$, also $x = \text{Arc} \sin v$, $dx = \frac{dv}{\sqrt{1-v^2}}$, $\cos x = \sqrt{1-v^2}$,

und wenn ich demnächst statt v lieber das Zeichen x wähle,

$$\int \frac{x^m \, . \, dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} \left\{ \frac{x^{m-1}}{m} + \frac{(m-1)}{m(m-2)} x^{m-3} + \frac{(m-1)(m-3)}{m(m-2)(m-4)} x^{m-5} + \frac{(m-1)(m-3)(m-5)}{m(m-2)(m-4)(m-6)} x^{m-7} \right.$$
$$\left. + \ldots\ldots + Bx \right\} + B . \text{ Arc} \sin x + C, \text{ wenn } m \text{ gerade.}$$

Wenn z. B. $m = 2$, so ist

$$\int \frac{x^2 \, . \, dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} \left\{ \tfrac{1}{2} x \right\} + \tfrac{1}{2} \text{ Arc} \sin x + C;$$ es ist also in diesem Falle $B = \frac{1}{2}$.

Wenn $m = 6$, so ist

$$\int \frac{x^6 \, . \, dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} \left\{ \frac{x^5}{6} + \frac{5}{6 \cdot 4} x^3 + \frac{5 \cdot 3}{6 \cdot 4 \cdot 2} x \right\} + \frac{5 \cdot 3}{6 \cdot 4 \cdot 2} \text{ Arc} \sin x + C$$
$$= -\sqrt{1-x^2} \left\{ \tfrac{1}{6} x^5 + \tfrac{5}{24} x^3 + \tfrac{5}{16} x \right\} + \tfrac{5}{16} \text{ Arc} \sin x + C;$$ es ist also $B = \frac{5}{16}$.

III. In welcher Weise von dem $\int x^{mn-1} . (1-x^n)^p . dx$ zu speciellеren Resultaten hinabgestiegen werden kann, ist bereits in den ersten Paragraphen an einigen Beispielen gezeigt worden, und es versteht sich, dass dieses beliebig fortgesetzt werden kann; denn ich brauche den Grössen m, n und p nicht immer blos numerische Werthe beizulegen, sondern kann dieselben auch untereinander in die verschiedensten Beziehungen bringen. Auch könnte ich in dem entwickelten Integral Substitutionen vornehmen, und dadurch zur Integration anderer Grössen gelangen; es ist nur die Frage, welche Substitutionen am passendsten vorzunehmen sind. Die specielleren Resultate können endlich wieder durch theilweise Integration etc. zu andern Resultaten umgeformt werden. Ueber diesen Fall möge noch ein Beispiel vorgetragen werden.

Durch theilweise Integration des $\int \frac{x^n . dx}{1-x^2}$ hatte sich im § 4. das $\int \frac{x^m . dx}{(1-x^2)^2}$ ergeben. Es sei nun im $\int \frac{x^n . dx}{(1-x^2)^2}$ wieder $u = \frac{x^n}{(1-x^2)^2}$ und $v = x$, dann ist

$$\frac{du}{dx} = \frac{(1-x^2)^2 . nx^{n-1} + x^n . 2(1-x^2) . 2x}{(1-x^2)^4} \text{ und } \int v . du = n \int \frac{x^n . dx}{(1-x^2)^2} + 4 \int \frac{x^{n+2} . dx}{(1-x^2)^3}$$

Da nun $\int u . dv = uv - \int v . du$, so ist auch

$$\int \frac{x^n . dx}{(1-x^2)^2} = \frac{x^{n+1}}{(1-x^2)^2} - n \int \frac{x^n . dx}{(1-x^2)^2} - 4 \int \frac{x^{n+2} . dx}{(1-x^2)^3}.$$ Es ist also

$$(n+1) \int \frac{x^n . dx}{(1-x^2)^2} = \frac{x^{n+1}}{(1-x^2)^2} - 4 \int \frac{x^{n+2} . dx}{(1-x^2)^3},$$ folglich

3) $$\int \frac{x^{n+2} dx}{(1-x^2)^3} = \frac{x^{n+1}}{4(1-x^2)^2} - \left(\frac{n+1}{4}\right) \int \frac{x^n . dx}{(1-x^2)^2}.$$ Für dieses letztere Integral sind mir aber zwei Resultate bekannt. Zunächst wähle ich dasjenige für n gerade; alsdann ist

$$\left(\frac{n+1}{4}\right) \int \frac{x^n . dx}{(1-x^2)^2} = \left(\frac{n+1}{4}\right) \frac{x^{n-1}}{2(1-x^2)} - \left(\frac{n+1}{4}\right)\left(\frac{n-1}{4}\right) l\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \left(\frac{n+1}{4}\right)\left(\frac{n-1}{2}\right) \left\{ x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\ldots\ldots + \frac{x^{n-3}}{n-3} \right\} + C$$

folglich auch
$$\int \frac{x^{n+2} . dx}{(1-x^2)^3} = \left(\frac{n^2-1}{16}\right) l\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \frac{(n+3)x^{n+1} - (n+1)x^{n-1}}{8(1-x^2)^2} - \frac{n^2-1}{8} \left\{ x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{x^{n-3}}{n-3} \right\} + C.$$

Wenn $n + 2 = m$, so ist $n = m - 2$, $n^2 - 1 = (m-2)^2 - 1 = m^2 - 4m + 3 = (m-1)(m-3)$, und wenn m gerade:

$$\int \frac{x^m \, . \, dx}{(1-x^2)^3} = \frac{(m-1)(m-3)}{16} \, l\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \frac{(m+1)x^{m-1} - (m-1)x^{m-3}}{8(1-x^2)^2} - \frac{(m-1)(m-3)}{8}\left\{x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\ldots + \frac{x^{m-5}}{m-5}\right\} + C.$$

Die Integration gelingt für $m = 1$, $m = 3$, und wenn $m - 5$ eine positive ungerade Zahl ist, also für $m = 6$, $m = 8$, überhaupt für m gerade.

$$\int \frac{x \, . \, dx}{(1-x^2)^3} = \frac{1}{4(1-x^2)^2} + C; \int \frac{x^3 \, . \, dx}{(1-x^2)^3} = \frac{2x^2 - 1}{4(1-x^2)^2} + C; \int \frac{x^6 \, . \, dx}{(1-x^2)^3} = \frac{15}{16} \, l\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \frac{7x^5 - 5x^3}{8(1-x^2)^2} - \frac{15}{8}x + C \text{ u. s. w.}$$

Wenn aber in dem obigen Resultate in 1) n ungerade ist, so ist

$$\left(\frac{n+1}{4}\right)\int \frac{x^n \, . \, dx}{(1-x^2)^2} = \left(\frac{n+1}{4}\right)\frac{x^{n-1}}{2(1-x^2)} + \left(\frac{n+1}{4}\right)\left(\frac{n-1}{4}\right) l\left(1-x^2\right) + \left(\frac{n+1}{4}\right)\left(\frac{n-1}{2}\right)\left\{\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{6} + \ldots\ldots + \frac{x^{n-3}}{n-3}\right\} + C$$

und daher

$$\int \frac{x^{n+2} \, . \, dx}{(1-x^2)^3} = \frac{(n+3)x^{n+1} - (n+1)x^{n-1}}{8(1-x^2)^2} - \frac{(n+1)(n-1)}{16} \, l\left(1-x^2\right) - \frac{(n+1)(n-1)}{8}\left\{\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{6} + \ldots\ldots + \frac{x^{n-3}}{n-3}\right\} + C.$$

Wenn $n + 2 = m$, so ist $n = m - 2$, und wenn m ungerade:

$$\int \frac{x^m \, . \, dx}{(1-x^2)^3} = \frac{(m+1)x^{m-1} - (m-1)x^{m-3}}{8(1-x^2)^2} - \frac{(m-1)(m-3)}{16} \, l\left(1-x^2\right) - \frac{(m-1)(m-3)}{8}\left\{\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{6} + \ldots\ldots + \frac{x^{m-5}}{m-5}\right\} + C.$$

Die Integration gelingt für den Fall, in welchem $m - 5$ eine positive gerade Zahl ist, also für $m = 7$, $m = 9$, $m = 11$ u. s. w.

Durch theilweise Integration des $\int \frac{x^m \, . \, dx}{(1-x^2)^3}$ ergeben sich sodann wiederum für $\int \frac{x^n \, . \, dx}{(1-x^2)^4}$ zwei Resultate, je nachdem n gerade oder ungerade.

Wenn n gerade, so ist alsdann

$$\int \frac{x^n \, . \, dx}{(1-x^2)^4} = \frac{\{8 + (n-1)^2\} x^{n-1} - 2(n-1)(n-2)x^{n-3} + (n-1)(n-3)x^{n-5}}{48(1-x^2)^3} - \frac{(n-1)(n-3)(n-5)}{96} \, l\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$+ \frac{(n-1)(n-3)(n-5)}{48}\left\{x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\ldots + \frac{x^{n-7}}{n-7}\right\} + C.$$

Ist z. B. $n = 8$, so ist

$$\int \frac{x^8 \, . \, dx}{(1-x^2)^4} = \frac{57x^7 - 84x^5 + 35x^3}{48(1-x^2)^3} - \frac{35}{32} \, l\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \frac{35}{16}x + C.$$

Auf diese Weise kann man zu immer neuen Resultaten gelangen, welche demnächst wiederum vermöge einer Verallgemeinerung zu einem umfassenderen Resultat vereinigt werden können. So sei in vorgelegtem Falle

$$\int \frac{x^m \, . \, dx}{(1-x^2)^n} = \frac{Ax^{m-1} + Bx^{m-3} + Cx^{m-5} + Dx^{m-7} + Ex^{m-9} + \ldots\ldots}{(1-x^2)^{n-1}} + C$$

Zwar könnte ich noch $+ F . l\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + G\left\{x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\ldots + \frac{x^{m-2n+1}}{m-2n+1}\right\}$ dieser Gleichung hinzufügen, indess würde F sowohl als $G = o$ werden, da die vorhandenen Coëfficienten, wie die Rechnung lehrt, zur Entwickelung des Integrales genügen. Die Differenziation dieser Gleichung ergiebt

$$\frac{x^m}{(1-x^2)^n} = \frac{\left\{\begin{array}{l}(1-x^2)^{n-1} . \left\{A(m-1)x^{m-2} + B(m-3)x^{m-4} + C(m-5)x^{m-6} + D(m-7)x^{m-8} + E(m-9)x^{m-10} + \ldots\right\} \\ - \left\{Ax^{m-1} + Bx^{m-3} + Cx^{m-5} + Dx^{m-7} + Ex^{m-9} + \ldots\right\}\left\{(n-1)(1-x^2)^{n-2} . (-2x)\right\}\end{array}\right\}}{(1-x^2)^{2n-2}}$$

oder mit $\left(1-x^2\right)^{2n-2}$ multiplicirt,

$$x^m\left(1-x^2\right)^{n-2} = \left(1-x^2\right)^{n-1}.\left\{A(m-1)x^{m-2} + B(m-3)x^{m-4} + C(m-5)x^{m-6} + D(m-7)x^{m-8} + E(m-9)x^{m-10} + \ldots\right\}$$
$$+ 2(n-1)x\left(1-x^2\right)^{n-2}.\left\{Ax^{m-1} + Bx^{m-3} + Cx^{m-5} + Dx^{m-7} + Ex^{m-9} + \ldots\right\} \text{ oder}$$

$$x^m\left(1-x^2\right)^{n-2} = \left(1-x^2\right)^{n-2}.\left\{2(n-1)Ax^m + 2(n-1)Bx^{m-2} + 2(n-1)Cx^{m-4} + 2(n-1)Dx^{m-6} + 2(n-1)Ex^{m-8} + \ldots\right\}$$
$$+ \left(1-x^2\right)^{n-1}.\left\{(m-1)Ax^{m-2} + (m-3)Bx^{m-4} + (m-5)Cx^{m-6} + (m-7)Dx^{m-8} + \ldots\right\}$$

Es ist aber auch

$$x^m\left(1-x^2\right)^{n-2} = \left(1-x^2\right)^{n-2}.\left\{\begin{array}{l} 2(n-1)Ax^m + 2(n-1)Bx^{m-2} + 2(n-1)Cx^{m-4} + 2(n-1)Dx^{m-6} + 2(n-1)Ex^{m-8} + \ldots \\ + \left(1-x^2\right)\left\{(m-1)Ax^{m-2} + (m-3)Bx^{m-4} + (m-5)Cx^{m-6} + (m-7)Dx^{m-8} + \ldots\right\}\end{array}\right\}$$

folglich

$$\begin{aligned} x^m = \; & 2(n-1)Ax^m + 2(n-3)Bx^{m-2} + 2(n-1)Cx^{m-4} + 2(n-1)Dx^{m-6} + 2(n-1)Ex^{m-8} + \ldots \\ & + (m-1)Ax^{m-2} + (m-3)Bx^{m-4} + (m-5)Cx^{m-6} + (m-7)Dx^{m-8} + \ldots \\ & - (m-1)Ax^m - (m-3)Bx^{m-2} - (m-5)Cx^{m-4} - (m-7)Dx^{m-6} - (m-9)Ex^{m-8} - \ldots \end{aligned}$$

Es entstehn daher folgende Bestimmungsgleichungen:

1) $2(n-1)A - (m-1)A = 1$ oder $A = \frac{1}{2n-m-1}$

2) $\{2(n-1) - (m-3)\}B + (m-1)A = 0$, oder $B = \frac{-(m-1)}{(2n-m-1)(2n-m+1)}$

3) $\{2(n-1) - (m-5)\}C + (m-3)B = 0$, oder $C = \frac{+(m-1)(m-3)}{(2n-m-1)(2n-m+1)(2n-m+3)}$

4) $\{2(n-1) - (m-7)\}D + (m-5)C = 0$, oder $D = \frac{-(m-1)(m-3)(m-5)}{(2n-m-1)(2n-m+1)(2n-m+3)(2n-m+5)}$ u. s. w.

Daher entsteht folgendes Integral:

$$\int\frac{x^m . dx}{(1-x^2)^n} = \frac{\frac{1}{2n-m-1}x^{m-1} - \frac{(m-1)}{(2n-m-1)(2n-m+1)}x^{m-1} + \frac{(m-1)(m-3)}{(2n-m-1)(2n-m+1)(2n-m+3)}x^{m-5} \ldots\ldots}{(1-x^2)^{n-1}} + C \quad \text{oder}$$

$$\int\frac{x^m . dx}{(1-x^2)^n} = \frac{1}{(2n-m-1)(1-x^2)^{n-1}}\left\{x^{m-1} - \frac{(m-1)}{2n-m+1}x^{m-3} + \frac{(m-1)(m-3)}{(2n-m+1)(2n-m+3)}x^{m-5} - \frac{(m-1)(m-3)(m-5)}{(2n-m+1)(2n-m+3)(2n-m+5)}x^{m-7} \ldots\right\} + C$$

m muss ungerade sein, wenn das Integral gelingen soll.

Ist $m = 1$, so ist $\int\frac{x\,dx}{(1-x^2)^n} = \frac{1}{2(n-1)(1-x^2)^{n-1}} + C$, n darf nicht $= 1$ werden.

Ist $m = 3$, so ist $\int\frac{x^3 . dx}{(1-x^2)^n} = \frac{1}{(2n-4)(1-x^2)^{n-1}}\left\{x^2 - \frac{2}{2n-2}\right\} + C = \frac{(n-1)x^2 - 1}{2(n-1)(n-2)(1-x^2)^{n-1}} + C$

n darf also nicht $= 1$, und nicht $= 2$ werden.

Ist $m = 5$, so ist $\int\frac{x^3 . dx}{(1-x^2)^n} = \frac{1}{(2n-6)(1-x^2)^{n-1}}\left\{x^4 - \left(\frac{4}{2n-4}\right)x^2 + \frac{4.2}{(2n-4)(2n-2)}\right\} + C$

$$= \frac{(n-1)(n-2)x^4 - 2(n-1)x^2 + 2}{2(n-1)(n-2)(n-3)(1-x^2)^{n-1}} + C.$$

Hierbei darf n nicht $= 1$, nicht $= 2$, und nicht $= 3$ werden.

IV. Auf dieselbe Art, durch welche ich im 2ten Abschnitt zur Entwickelung des $\int x^n . \cos^{12} x . dx$ gelangte, finde ich noch

$$\int x^n . \{l(x)\}^m . dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\left\{\{l(x)\}^m - \left(\frac{m}{n+1}\right)\{l(x)\}^{m-1} + \frac{m(m-1)}{(n+1)^2}\{l(x)\}^{m-2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{(n+1)^3}\{l(x)\}^{m-3}\right.$$
$$\left. + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{(n+1)^4}\{l(x)\}^{m-4} - \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{(n+1)^5}\{l(x)\}^{m-5} \ldots\right\} + C.$$

Verlag der Weidmannschen Buchhandlung J. Reimer in Berlin.

Druck von Breitkopf und Härtel in Leipzig.



